

Modelado Mediante Elementos Finitos y Análisis Vibratorio de Cristales Sónicos

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras



D. Javier Gañán Suárez

Septiembre - 2015

Tutores: Dr. D. Ramón Zaera Polo.
Dr. D. José Fernández Sáez.

AGRADECIMIENTOS

A mis tutores, Ramón y José, por darme la oportunidad de realizar este Trabajo, sin vuestro apoyo y empuje no podría haber escrito nada de lo que sigue.

A vosotros, amigos (vosotros sabéis quienes sois), por alargar estos años hasta el final.

A mi familia, padre, madre y hermana. Gracias.

RESUMEN

Las ondas se propagan de manera omnidireccional cuando entran en un medio continuo. Para algunas aplicaciones tecnológicas puede resultar de utilidad restringir la propagación de una onda dentro de un espacio finito. Los cristales sónicos son estructuras periódicas que poseen propiedades vibratorias diferentes en función de la configuración estructural y material de los componentes que conforman el sistema. Concretamente la capacidad de absorber ondas incidentes, sin importar la dirección de éstas, presentes en estas estructuras se debe a la existencia de bandgaps (rangos de frecuencias que el cristal no es capaz de transmitir).

El objeto de estudio de este Trabajo es el análisis de un cristal sónico tridimensional para localizar los rangos de frecuencias prohibidas presentes en él así como la influencia de la densidad y dimensiones de los elementos que componen la estructura, para poder diseñar futuras estructuras con propiedades que se adapten, de la manera más precisa posible, a las necesidades requeridas.

Para ello, se realiza un análisis analítico de las ecuaciones que rigen el movimiento en la estructura seguido de un análisis paramétrico de dichas ecuaciones para identificar los parámetros influyentes en el movimiento del cristal sónico. Una vez identificados los parámetros, se genera un modelo y se analiza, haciendo uso del Método de los Elementos Finitos, a través código comercial ABAQUS.

Finalmente se presentan los resultados obtenidos, tanto para el análisis principal como para los estudios paramétricos realizados, y un apéndice con las conclusiones generales a las que se ha llegado.

ABSTRACT

Waves propagate omnidirectional through a continuous medium. For some technological applications could be useful to restrict the propagation of a wave along a finite path. Sonic crystals are periodic structures with different vibrational properties with direct dependence on its elements configuration, both structural and material. In particular, the ability to absorb wave's energy, no matter in which direction the wave impacts the crystal, of this kind of structures is due to the existence of bandgaps (specific range of frequencies that the crystal cannot transmit).

The main objective of this Project is the analysis of a tridimensional sonic crystal in order to locate those bandgaps that the system would have. The influence in bandgaps due to the density and dimension of the elements that form the structure is also evaluated. This knowledge will permit the creation of different sonic crystals which will have an accurate adaptation into a specific request.

With that aim, an analytic analysis of the movement equations of the system is made in first place. Later a parametric analysis of those equations is made in order to identify the most influent values that will affect the movement of the whole structure. Once this previous analysis are made, the model is generated and analyzed using the Finite Element Method, by using the computational code ABAQUS.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS.....	1
RESUMEN.....	2
ABSTRACT	3
INDICE DE FIGURAS	6
INDICE DE TABLAS	8
1. CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.....	9
1.1. INTRODUCCIÓN.	9
1.2. OBJETIVOS.	10
2. CAPITULO 2: CONCEPTOS PREVIOS.	11
2.1. ¿QUÉ ES UNA VIBRACIÓN MECÁNICA?	11
2.1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE VIBRACIONES MECANICAS.....	12
2.2. VIBRACIONES EN MEDIOS CONTINUOS.....	13
2.2.1. VIBRACIONES TRANSVERSALES EN VIGAS.	14
2.2.2. VIBRACIONES EN PLACAS PLANAS.....	19
2.3. ¿QUÉ ES UN CRISTAL SÓNICO?.....	26
2.3.1. ESTRUCTURA LATTICE.....	30
2.3.2. BANDA PROHIBIDA.	32
3. CAPITULO 3: FORMULACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	34
3.1. FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA.....	34
3.2. TRATAMIENTO DEL PROBLEMA.....	39
3.2.1. TEOREMA DE FLOQUET-BLOCH.....	39
3.2.2. PLANTEAMIENTO DEL CASO BASE.....	42
3.2.3. PARAMETRIZACION DEL PROBLEMA.	48
4. CAPITULO 4: METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA	52
4.1. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM).....	52
4.2. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO EN EL CASO BASE.....	53
5. CAPITULO 5: RESULTADOS.	57
5.1. RESULTADOS PARA EL CASO BASE.	57
5.2. INFLUENCIA DEL RADIO.	64
5.3. INFLUENCIA DE LA DENSIDAD	66
6. CAPITULO 6: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.	68
6.1. CONCLUSIONES	68

6.2. TRABAJOS FUTUROS.....	70
BIBLIOGRAFIA.....	71
ANEXO DE RESULTADOS.....	73

INDICE DE FIGURAS

CAPITULO 2: CONCEPTOS PREVIOS

Figura 2. 1. Movimiento oscilatorio de una partícula	11
Figura 2. 2. Viga en flexión	15
Figura 2. 3. Modos de vibración perpendiculares en una viga doblemente simétrica.	19
Figura 2. 4. Placa plana.	20
Figura 2. 5. Configuraciones espaciales para un cristal sónico.	26
Figura 2. 6. Cristal sónico. Escultura de Eusebio Sempere.	27
Figura 2. 7. Ejemplos de estructuras lattice en un material compuesto (a), un panel de abejas (b) y en el fuselaje de un avión (c).	28
Figura 2. 8. Espectro de ondas.	28
Figura 2. 9. Esquema de un bandgap expresado en frecuencia/vector de onda (a) y en frecuencia/coef. de transmisión (b).	29
Figura 2. 10. Redes de Bravais para los casos bidimensionales y tridimensionales.	30
Figura 2. 11. Obtención de la celda primitiva de Wigner-Seitz.	31
Figura 2. 12. Fenómeno de refracción en un cristal sónico.	32
Figura 2. 13. Bandgap total y parcial de una estructura.	33

CAPITULO 3: FORMULACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Figura 3. 1. Cristal sónico formado por nano-objetos y sustrato.	35
Figura 3. 2. Cristal sónico completo, formado por una matriz de 11x11 barras.	38
Figura 3. 3. Estructura lattice y celdas primitivas.	41
Figura 3. 4. Zona de Brillouin dentro de la celda primitiva.	41
Figura 3. 5. Celda unitaria del cristal sónico.	42
Figura 3. 6. Vista cenital de varias celdas unitarias dentro del cristal sónico.	45
Figura 3. 7. Direcciones de incidencia de la onda.	46

CAPITULO 4: METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Figura 4. 1. Barra (a), placa (b) y celda unitaria (c), modelados en ABAQUS.	54
Figura 4. 2. Mallado de la celda unitaria en ABAQUS.	55
Figura 4. 3. Condiciones de contorno (a) y de ligadura (b) en la celda unitaria en ABAQUS.	56

CAPITULO 5: RESULTADOS

Figura 5. 1. Curvas de excitación para el caso base.	58
Figura 5. 2. Cuarto y quinto modo de vibración del modelo base.	59
Figura 5. 3. Representación del bandgap en el caso base.	60
Figura 5. 4. Desplazamiento vertical de un punto del cristal sónico en función del tiempo y del tipo de onda.	61

Figura 5. 5. Desplazamiento vertical de un punto situado a 0.035m del origen de la vibración, en función del tiempo y del tipo de onda.....	62
Figura 5. 6. Desplazamiento vertical de un punto situado a 0.177m del origen de la vibración, en función del tiempo y del tipo de onda.....	63
Figura 5. 7. Desplazamiento vertical de un punto situado a 0.283m del origen de la vibración, en función del tiempo y del tipo de onda.....	63
Figura 5. 8. Rango y amplitud del bandgap en función del radio de la barra.	65
Figura 5. 9. Rango y amplitud del bandgap en función de la densidad de la barra.	67

INDICE DE TABLAS

CAPITULO 2: CONCEPTOS PREVIOS

Tabla 2.1. Valores de β I para una viga en voladizo.	18
Tabla 2.2. Frecuencias naturales para una viga en voladizo.	19
Tabla 2.3. Frecuencias naturales para una placa plana.....	26

CAPITULO 3: FORMULACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Tabla 3. 1. Dimensiones y propiedades de la placa del cristal sónico.....	39
Tabla 3. 2. Dimensiones y propiedades de las barras del cristal sónico.	39
Tabla 3. 3. Dimensiones y propiedades de la placa, dentro de la celda unitaria.	43
Tabla 3. 4. Dimensiones y propiedades de la barra, dentro de la celda unitaria.....	43
Tabla 3. 5. Valores de los coeficientes de ligadura en la dirección OA.	47
Tabla 3. 6. Valores de los coeficientes de ligadura en la dirección AB.....	47
Tabla 3. 7. Valores de los coeficientes de ligadura en la dirección BO.	48
Tabla 3. 8. Casos planteados para analizar.....	50
Tabla 3. 9. Resumen de propiedades importantes en los casos analizados.	51

CAPITULO 5: RESULTADOS

Tabla 5. 1. Frecuencias naturales de la celda unitaria en función del vector de onda.	57
Tabla 5. 2. Casos dentro del análisis paramétrico del radio de la barra.	64
Tabla 5. 3. Valores del bandgap obtenidos en el análisis paramétrico del radio de la barra.....	64
Tabla 5. 4. Casos dentro del análisis paramétrico de la densidad de la barra.	66
Tabla 5. 5. Valores del bandgap obtenidos en el análisis paramétrico de la densidad de la barra.	66

CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

1.1. INTRODUCCIÓN

Los resonadores y aisladores mecánicos han sido usados como base de investigación en un amplio campo de la física, que abarca desde teorías fundamentales hasta su uso en mediciones cuánticas. Quizás este último punto es la razón primordial por la que estos sistemas están en pleno auge, si bien es cierto que las dimensiones requeridas en estos resonadores/aisladores, aplicados al estudio cuántico, está en la escala nanoscópica.

Desde el punto de vista tecnológico, los cristales sónicos son apreciados gracias a su tamaño compacto, robustez y a la alternativa real que ofrecen como sustitutos de los existentes circuitos electrónicos al ser empleados como, por ejemplo, osciladores selectivos de frecuencias o filtros pasivos [1,2]. Sus aplicaciones reales están presentes en campos tan dispares como la telecomunicación o como sensores tecnológicos usados en la industria química, biomédica o mecánica, siendo en esta última donde mayores desarrollos se pueden obtener mediante la implantación de estas estructuras como posibles amortiguadores de las vibraciones generadas por el uso de los mecanismos.

La aplicación de estas estructuras está delimitada por el tamaño y propiedades mecánicas del sistema. Podría desarrollarse un cristal sónico que, colocado estratégicamente en el fondo del mar, pudiera bloquear la propagación de las olas en la superficie, puesto que éstas no son más que ondas propagándose por la superficie del medio marino. Por otro lado, reduciendo el tamaño del cristal sónico a la escala microscópica o nanoscópica, se alcanzan valores de funcionamiento en torno al megahercio y al gigahercio, respectivamente, lo que permitiría su implementación dentro de las telecomunicaciones. La variación en los rangos de funcionamiento del sistema se puede lograr variando las propiedades mecánicas de los materiales que lo forman [3,4] o variando la geometría de los mismos [5].

Este Trabajo Final de Grado se basa en el estudio del comportamiento vibratorio de un cristal sónico, analizado mediante el Método de los Elementos Finitos.

1.2. OBJETIVOS

El objetivo principal de este Trabajo recae en el análisis vibratorio de un cristal sónico, formado por una placa de pequeño espesor y una viga transversal y centrada sobre la placa.

Aunque los cristales sónicos pueden usarse como resonadores o aisladores, es esta segunda característica en la que se centra el Trabajo. Mediante simulación con el código computacional de elementos finitos ABAQUS/CAE, se van a obtener los rangos de frecuencias prohibidas (bandgaps) presentes en la estructura, es decir, se va a mostrar la capacidad que tienen estas estructuras para impedir la propagación de ondas de frecuencias determinadas.

Una vez localizados estos bandgaps, se realizará un análisis paramétrico del sistema para comprender como afectan ciertas características del sistema. En particular se evalúa la influencia que tienen la densidad y la geometría de las barras como factores de interés en la generación de los rangos de frecuencias prohibidas dentro del cristal.

Para lograr el objetivo final del Trabajo, fue necesario como objetivo previo el estudio y comprensión de las Teorías de Vibraciones en Medios Continuos así como la profundización en el manejo del código comercial ABAQUS como herramienta de cálculo.

CAPITULO 2: CONCEPTOS PREVIOS

En este capítulo se ofrece una visión global de los conceptos teóricos considerados de interés para el correcto entendimiento del Trabajo.

2.1. ¿QUÉ ES UNA VIBRACIÓN MECÁNICA?

En el marco de la ingeniería es vital saber de qué forma se va a comportar un sistema mecánico para poder realizar un diseño acorde a las necesidades funcionales y operacionales que se requieran. En este sentido, las vibraciones son un aspecto importante a tener en cuenta en fase de diseño ya que, con el conocimiento necesario, se pueden minimizar los efectos negativos evitando así el desprendimiento o rotura de algún elemento dentro del sistema.

Se define como vibración mecánica a la oscilación, a lo largo del tiempo, de un punto material o de un cuerpo rígido en torno a su posición de equilibrio.

Como representación, en la figura 2.1 se puede observar el movimiento oscilatorio de un cuerpo suspendido mediante un muelle.

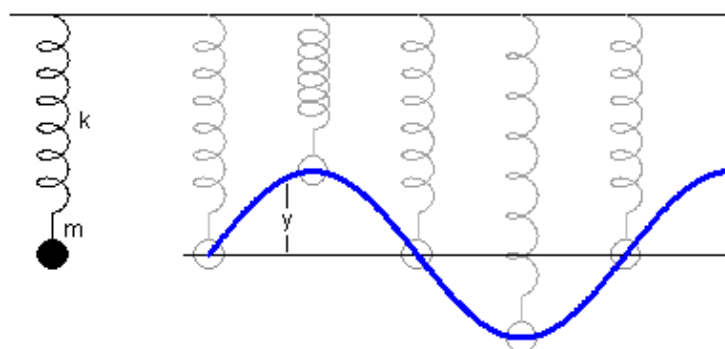


Figura 2. 1. Movimiento oscilatorio de una partícula

En función del origen de la vibración, éstas se pueden clasificar en dos grupos:

- Vibración libre: Cuando no existen acciones o fuerzas externas que estén aplicadas directamente sobre el sistema, es decir, sólo existen los esfuerzos internos.

- **Vibración forzada:** Cuando existen fuerzas o acciones directamente aplicadas sobre el sistema, además de los esfuerzos internos.

Por lo tanto, un sistema puede vibrar por su propio efecto al usarse o bien al ser excitado por un agente externo. En general, en toda vibración se producen dos fenómenos:

1. Almacenamiento de energía potencial en los elementos elásticos.
2. Almacenamiento de energía cinética en las masas de inercia del sistema.

2.1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE VIBRACIONES MECÁNICAS

A la hora de hablar de vibraciones se utilizan una serie de términos que es conveniente conocer. A continuación se explican brevemente los más comunes e importantes:

- **Amplitud de onda:** Es la variación máxima que experimenta una partícula respecto a su posición de equilibrio, medida en unidades de longitud.
- **Frecuencia:** Durante la vibración, indica el número de veces que una partícula pasa por la misma posición en un segundo. Se mide en hertzios (Hz).
- **Periodo:** Es la medida inversa de la frecuencia, es decir, indica el periodo de tiempo que tarda una partícula en pasar por una posición equivalente. Se mide en segundos (s).
- **Nodo:** Es el nombre que recibe un punto material que permanece fijo mientras se produce la vibración. Es decir, los nodos son aquellos puntos de una onda estacionaria cuya amplitud es nula en cualquier momento temporal.
- **Antinodo:** Al contrario que el nodo, es el punto material del sistema cuya

posición varía con el tiempo y que, además, posee la máxima amplitud que puede presentar el cuerpo durante la vibración.

- **Velocidad de propagación:** Hace referencia a la velocidad con la que una onda determinada se propaga por el medio, dependiendo directamente de éste. Se mide en unidades de longitud sobre tiempo.
- **Modos de vibración:** Se llama así al patrón o forma geométrica característica en el que vibrará un sistema mecánico. Dentro de las estructuras se distinguen tres tipos de modo de vibración: longitudinal, flector y torsional. Por tanto, la vibración del sistema es una combinación de todos los modos de vibración, aunque no todos se encuentren excitados en el mismo nivel.
- **Frecuencia natural o frecuencia propia:** Se denomina así a la frecuencia en la que el sistema, en ausencia de cualquier fuerza externa o amortiguador, tiende a vibrar. En sistemas de N grados de libertad, cada frecuencia propia posee un modo de vibración asociado. Así mismo, las frecuencias naturales dependen tanto de las condiciones de contorno como de la geometría y propiedades intrínsecas del problema.

2.2. VIBRACIONES EN MEDIOS CONTINUOS

La materia está compuesta por un gran número de partículas que, al vibrar, lo hacen de forma acoplada. Por tanto, salvo casos concretos, se hace ineficiente explicar el comportamiento vibratorio de una partícula del sistema si no que se estudia en su conjunto. El nombre de medio continuo refiere a la concepción de la materia como un conjunto infinito de partículas, pudiendo formar parte de un sólido o de un fluido, y que se estudia macroscópicamente, es decir, sin tener en cuenta las irregularidades existentes

a niveles microscópicos.

Para comprender un poco más los futuros resultados, a continuación se van a explicar las vibraciones debidas a los esfuerzos flectores en vigas y las vibraciones en placas cuadradas.

Cabe destacar que, en vibraciones de vigas, existen 3 tipos: transversales, torsionales y vibraciones longitudinales. De éstas solo se explican las primeras puesto que son las vibraciones que resultan de interés en este Trabajo. Existen numerosas publicaciones y libros donde se puede aprender más de los otros dos tipos de vibraciones en vigas [6].

2.2.1. VIBRACIONES TRANSVERSALES EN VIGAS

Aunque las vigas son sólidos deformables, teóricamente se asumen ciertas simplificaciones que permiten calcular, de forma aproximada, el valor de las tensiones, desplazamientos y esfuerzos de éstas considerándolas como elementos unidimensionales. Dentro de este campo, la teoría más extendida es la Teoría de Euler-Bernoulli, cuyas asunciones principales son:

1. La viga está formada por un material elástico lineal, con módulo de Young constante y coeficiente de Poisson despreciable.
2. En cada punto de la viga, el desplazamiento vertical únicamente depende de la posición longitudinal.
3. Los puntos que conforman la fibra neutra de la viga únicamente sufren desplazamiento vertical y giro.
4. La tensión perpendicular a la fibra neutra es nula.
5. Las secciones planas que inicialmente son perpendiculares al eje longitudinal de la viga, se mantienen perpendiculares al eje de la viga después de las deformaciones.

Así, se considera una viga como la mostrada en la figura 2.2, donde $M(x,t)$ es el momento flector al cual está sometido, $V(x,t)$ es el esfuerzo cortante y $f(x,t)$ refiere a una fuerza externa, por unidad de longitud, aplicada en la viga.

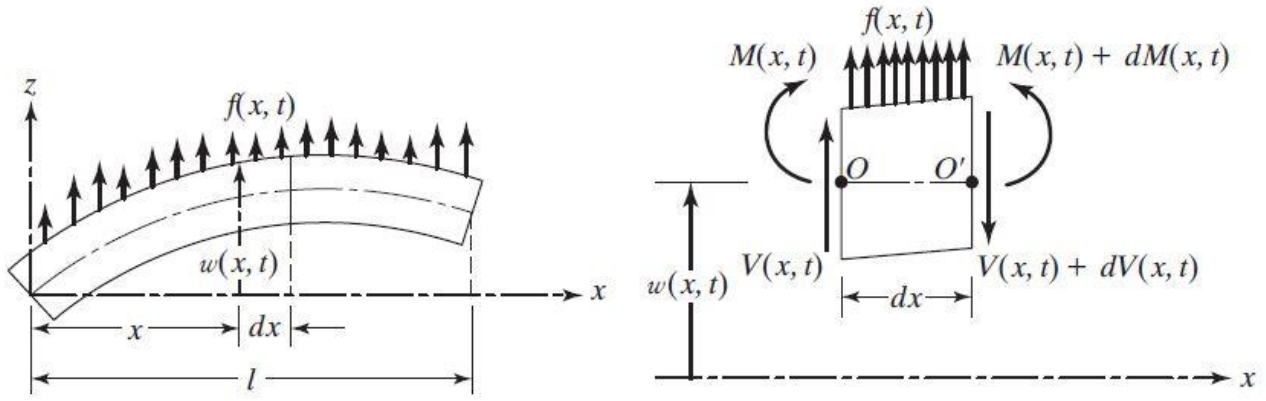


Figura 2. 2. Viga en flexión

Dado que la fuerza de inercia que actúa sobre una viga es:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Haciendo un equilibrio de fuerzas en una porción de la viga se llega a la ecuación del movimiento en la dirección z

$$-(V + dV) + f(x, t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Donde,

- ρ es la densidad de la viga.
- $A(x)$ es la sección transversal de la viga.
- $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ es la aceleración.

Por otro lado, la ecuación del equilibrio de momentos sobre el eje y, calculado a partir del punto O, es

$$(M + dM) - (V + dV)dx + (x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0$$

Por definición

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Sin tener en cuenta los términos a los que afectan las fuerzas externas en dx y haciendo uso de las relaciones anteriores, la ecuación de los esfuerzos cortantes puede escribirse de la forma

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

La teoría elemental de vigas describe la relación entre el momento flector y la desviación como

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Donde,

- E representa el Modulo de Young del material de la viga.
- $I(x)$ es el momento de inercia de la viga, referido a la sección transversal sobre el eje y .

Introduciendo esta última relación podemos reescribir la ley de los esfuerzos cortantes como sigue, obteniéndose la ecuación que gobierna las vibraciones longitudinales en vigas,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t)$$

Para el caso concreto de una viga de sección uniforme y sometida a vibración libre, la fórmula queda

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Donde c representa la velocidad de propagación de la onda longitudinalmente en el medio, la cual depende únicamente del material ya que $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$.

Para obtener las frecuencias naturales de vibración de la viga se tiene que resolver una ecuación derivada de segundo orden respecto del tiempo y de cuarto orden respecto del espacio. Por tanto se necesitan 2 condiciones iniciales y 4 condiciones de contorno. Por lo general, se toma el desplazamiento lateral y la velocidad inicial como $w_0(x)$ y

$w'_0(x)$, respectivamente, con lo que las condiciones iniciales se pueden escribir como

$$w(x, t = 0) = w_0(x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = w'_0(x)$$

La solución a la ecuación del movimiento se puede obtener mediante la separación de variables tal que

$$w(x, t) = W(x)T(t)$$

De esta forma se reescribe la ecuación de vibraciones laterales como

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = a = \omega^2$$

Donde $a = \omega^2$ es una constante siempre positiva. Separando la ecuación por sus términos,

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

De donde se obtiene la relación

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

La solución de la ecuación general puede expresarse como

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Donde A y B son constantes que se pueden obtener de las condiciones iniciales del problema. Por otro lado, se asume que

$$W(x) = C e^{sx}$$

Donde C y s son constantes. Derivando la ecuación auxiliar se obtiene

$$s^4 - \beta^4 = 0$$

Las raíces de la ecuación son 2 imaginarias y 2 reales

$$s_{1,2} = \pm \beta \quad s_{3,4} = \pm \beta i$$

Por lo que

$$W(x) = Ce^{sx} = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}$$

Donde C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son diferentes constantes que se obtienen gracias a las condiciones de contorno de la viga.

Por otro lado, las frecuencias naturales de una viga sometida a vibración lateral se pueden obtener de la ecuación

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

Donde,

- ω_n es la frecuencia natural de vibración de la viga para el modo n .
- $\beta_n l$ es una constante que depende de las condiciones de contorno como del modo de vibración de la viga.
- l es la longitud de la viga.

A modo ilustrativo, en la tabla 2.2 se muestran las 5 primeras frecuencias naturales de una viga en voladizo y cuyas propiedades geométricas influyentes son las siguientes:

- Longitud característica, $l = 0.15 \text{ m}$.
- Radio, $r = 0.005 \text{ m}$.
- Módulo de Young, $E = 72 \text{ GPa}$.
- Densidad del material, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$.
- Para una viga en voladizo, las condiciones de contorno son las siguientes:

$$w_{(x=0)} = w'_{(x=0)} = 0$$

$$w''_{(x=L)} = w'''_{(x=L)} = 0$$

Por lo que los primeros 5 valores de $\beta_n l$ son los mostrados en la tabla 2.1.

n	1	2	3	4	5
$\beta_n l$	1.875	4.694	7.855	10.996	14.137

Tabla 2.1. Valores de βl para una viga en voladizo.

Cabe destacar que aunque las ecuaciones muestran las vibraciones longitudinales en el plano zx también son válidas para el plano yx , siendo estos planos perpendiculares entre sí a la vez que son ortogonales a la dirección longitudinal de la viga. Esto se da únicamente en vigas con perfiles doblemente simétricos, como en perfiles circulares o cuadrados. Por este motivo cada una de las frecuencias naturales obtenidas está duplicada puesto que, aun siendo planos ortogonales, la frecuencia natural de vibración para un modo concreto es idéntica. En la figura 2.3 se muestra cómo, para uno de los modos de vibración, la viga se deforma exactamente igual en ambos planos.

n	1	2	3	4	5
ω_n [Hz]	2.02E+03	1.26E+04	3.54E+04	6.94E+04	1.15E+05

Tabla 2.2. Frecuencias naturales para una viga en voladizo.

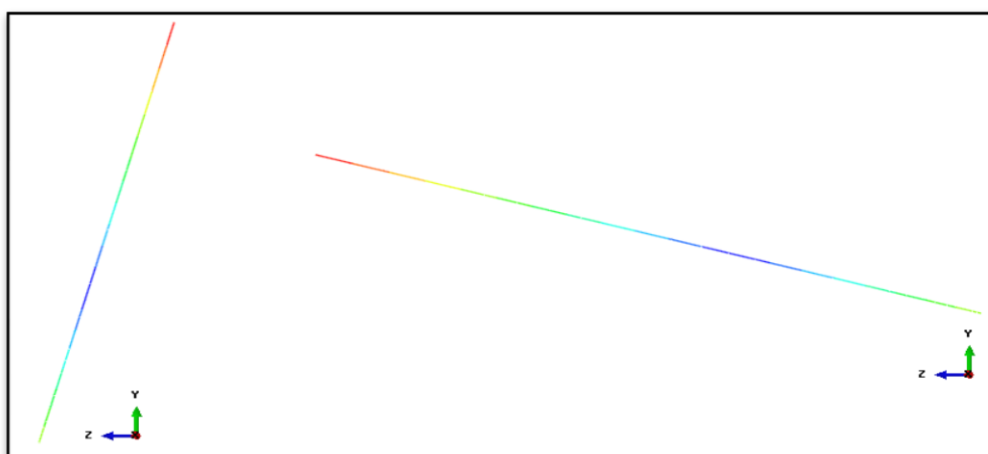


Figura 2. 3. Modos de vibración perpendiculares en una viga doblemente simétrica.

2.2.2. VIBRACIONES EN PLACAS PLANAS

La teoría de las deformaciones de placas delgadas, también conocida como *Teoría Clásica de Placas* o *Teoría de Kirchhoff* [7], considera ciertas asunciones similares a las empleadas en la *Teoría de Euler-Bernoulli* para vigas. Concretamente, en la *Teoría*

Clásica de Placas se asumen las siguientes condiciones:

1. El espesor de la placa (h) es mucho más pequeño que las dimensiones laterales.
2. El plano medio de la placa no sufre deformaciones, es decir, se mantiene como el plano neutro de la placa después de las deformaciones o esfuerzos flectores.
3. Los desplazamientos del plano medio de la placa son mucho más pequeños que el espesor de la placa.
4. La influencia de las deformaciones debido a los esfuerzos cortantes se desprecian, es decir, la sección plana perpendicular al plano medio de la placa antes de las deformaciones permanece perpendicular al plano medio incluso después de éstas.
5. La deformación vertical de la placa, en la dirección del espesor, puede despreciarse en comparación a las deformaciones en las otras direcciones de la placa.

De esta forma, se supone una placa referido al sistema de coordenadas ortogonales xyz . El plano medio de la placa se presupone coincidente con el plano xy antes de las deformaciones y las deformaciones de la placa se presuponen de la forma $w(x,y,z)$, como se muestra en la figura 2.4.

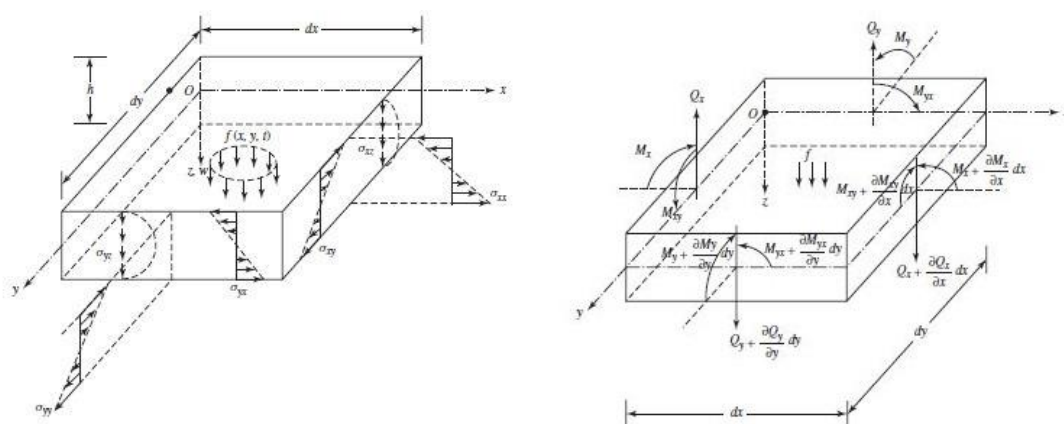


Figura 2. 4. Placa plana.

Considerando un elemento de la placa, se puede obtener la ecuación del equilibrio dinámico de las fuerzas en el eje z ,

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx + f dx dy - Q_x dy - Q_y dx = \rho h dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Donde,

- Q_x y Q_y son los esfuerzos cortantes en los ejes x e y, respectivamente.
- f es la fuerza aplicada sobre la placa.
- ρ es la densidad de la placa.
- h es el espesor de la placa.
- $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ es la aceleración.

O, de forma simplificada,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f(x, y, t) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Donde $f(x, y, t)$ es la fuerza instantánea aplicada por unidad de superficie.

Por otro lado, haciendo equilibrio de momentos en torno al eje x

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dx dy = \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} dy\right) dx + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\right) dy - M_y dx - M_{xy} dy - f dx dy \frac{dx}{2}$$

Despreciando aquellos términos que implican productos de valores irrelevantes, la ecuación puede reescribirse como

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

De forma análoga, haciendo equilibrio de momentos en torno al eje y obtenemos

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy dx = \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - M_x dy - M_{yx} dx - f dx dy \frac{dx}{2}$$

O,

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

Por otro lado, se asume que la placa está en un estado de tensión plana, por lo que los momentos existentes se pueden expresar como

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1 - \vartheta)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Donde,

- ϑ es el Coeficiente de Poisson del material de la placa.
- D es el módulo de rigidez a flexión de la placa, que puede obtenerse de la expresión:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \vartheta^2)}$$

Donde,

- E es el Módulo de Young de la placa.
- h es el espesor de la placa.
- ϑ es el Coeficiente de Poisson del material de la placa.

Haciendo uso de estas relaciones se pueden relacionar esfuerzos cortantes y momentos según las fórmulas

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Finalmente, haciendo uso de esta última relación, se puede expresar la ecuación del movimiento de una placa en términos de los desplazamientos, siendo

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, y, t)$$

Para encontrar la solución en el caso de vibraciones libres, se aplica la separación de variables, es decir,

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t)$$

De tal manera que la ecuación de movimiento queda dividida en 2 partes

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\omega^2$$

$$-\frac{\beta_l^2}{W(x,y)} \nabla^4 W(x,y) = -\omega^2$$

Donde,

- ω es una constante.
- β_l^2 es otra constante que se obtiene de la expresión.

$$\beta_l^2 = \frac{D}{\rho h}$$

- ∇^4 es la cuarta potencia del operador nabla [ref] y el cuadrado del operador laplaciano [ref]. También se le conoce como operador biarmónico o bilaplaciano.

Escritas de otra forma, las ecuaciones quedan

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

$$\nabla^4 W(x,y) - \lambda^4 W(x,y) = 0$$

Donde

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2}{\beta_l^2} = \frac{\rho h \omega^2}{D}$$

La solución general del sistema es, por tanto,

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Donde A y B son constantes que se pueden obtener de las condiciones iniciales del problema. Por otro lado, la ecuación diferencial independiente del tiempo, puede reformularse aplicando la propiedad distributiva, quedando

$$\nabla^4 W(x,y) - \lambda^4 W(x,y) = (\nabla^2 + \lambda^2)(\nabla^2 - \lambda^2)W(x,y) = 0$$

Aplicando la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, la solución completa a esta última ecuación sigue la forma

$$(\nabla^2 + \lambda^2)W_1(x,y) = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + \lambda^2 W_1(x,y) = 0$$

$$(\nabla^2 - \lambda^2)W_2(x, y) = \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} + \lambda^2 W_2(x, y) = 0$$

Cuyas soluciones son,

$$W_1(x, y) = A_1 \sin \alpha x \sin \beta y + A_2 \sin \alpha x \cos \beta y + A_3 \cos \alpha x \sin \beta y + A_4 \cos \alpha x \cos \beta y$$

$$W_2(x, y) = A_5 \sinh \theta x \sinh \varphi y + A_6 \sinh \theta x \cosh \varphi y + A_7 \cosh \theta x \sinh \varphi y + A_8 \cosh \theta x \cosh \varphi y$$

Donde $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \theta^2 + \varphi^2$ y A_n son constantes que se determinan mediante las condiciones de contorno del problema.

Finalmente se obtiene que la solución global es la combinación de las soluciones parciales,

$$W(x, y) = W_1(x, y) + W_2(x, y)$$

A modo ilustrativo, se van a obtener las 4 primeras frecuencias naturales para una placa simplemente apoyada por todos sus lados y cuyas propiedades influyentes son:

- Longitud en el eje x , $a = 0.05 \text{ m}$.
- Longitud en el eje y , $b = 0.05 \text{ m}$.
- Espesor, $h = 0.002 \text{ m}$.
- Módulo de Young, $E = 72 \text{ GPa}$.
- Coeficiente de Poisson, $\nu = 0.3$.
- Densidad del material, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$.

Las condiciones de contorno para una placa simplemente apoyada en todos sus lados son,

$$w(x, y, t) = M_x(x, y, t) = 0 \quad , \quad \text{válido para } x = 0 \quad \& \quad x = a$$

$$w(x, y, t) = M_y(x, y, t) = 0 \quad , \quad \text{válido para } y = 0 \quad \& \quad y = b$$

Escrito de otra forma,

$$W(0, y) = 0, \quad \left(\frac{d^2 W}{dx^2} + \nu \frac{d^2 W}{dy^2} \right) \Big|_{(0, y)} = 0$$

$$W(a, y) = 0, \quad \left(\frac{d^2 W}{dx^2} + \vartheta \frac{d^2 W}{dy^2} \right) \Big|_{(a, y)} = 0$$

$$W(x, 0) = 0, \quad \left(\frac{d^2 W}{dy^2} + \vartheta \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_{(x, 0)} = 0$$

$$W(x, b) = 0, \quad \left(\frac{d^2 W}{dy^2} + \vartheta \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_{(x, b)} = 0$$

Como W es constante a lo largo de los límites $x = 0$ y $x = a$, $d^2 W / dx^2$ será nulo a lo largo de estos límites. De forma análoga, $d^2 W / dy^2$ será cero a lo largo de los bordes $y = 0$ y $y = b$. Así, las condiciones de contorno se simplifican a,

$$W(0, y) = \frac{d^2 W}{dx^2}(0, y) = W(a, y) = \frac{d^2 W}{dx^2}(a, y) = 0$$

$$W(x, 0) = \frac{d^2 W}{dy^2}(x, 0) = W(x, b) = \frac{d^2 W}{dy^2}(x, b) = 0$$

Aplicando estas condiciones de contorno se llega a que el valor para todas las constantes A_n , a excepción de A_1 , se anulan, obteniéndose así 2 únicas ecuaciones de frecuencia a resolver,

$$\sin \alpha a = 0$$

$$\sin \beta b = 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones de frecuencia siguen la forma

$$\alpha_m a = m\pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\beta_n b = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por lo que se obtienen las frecuencias naturales de la placa como

$$\omega_{mn} = \lambda_{mn}^2 \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Donde m y n denotan las líneas nodales que no coinciden con los ejes x e y , respectivamente.

En la tabla 2.3 se muestran los valores de las 4 primeras frecuencias naturales obtenidas para la placa de las dimensiones mencionadas anteriormente.

ω_n [Hz]		m			
		1	2	3	4
n	1	1550.51	3876.26	7752.52	13179.28
	2	3876.26	6202.01	10078.27	15505.03
	3	7752.52	10078.27	13954.53	19381.29
	4	13179.28	15505.03	19381.29	24808.05

Tabla 2.3. Frecuencias naturales para una placa plana.

2.3. ¿QUÉ ES UN CRISTAL SÓNICO?

Se conoce como cristal sónico, o cristal fonónico, a una estructura, periódica y finita, cuyas características permite la dispersión de ondas en un rango de frecuencias específico. De un modo análogo, estas estructuras permiten potenciar frecuencias concretas ya que pueden ser configuradas de tal forma que su estructura sea usada como un camino por el cual las ondas logren transmitirse con gran eficiencia [8]. Estos cristales pueden considerarse como unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales, en función de la configuración en la que se éstos se encuentren. En la figura 2.5 se muestran 3 de las configuraciones tipo que pueden presentar los cristales, mientras que en la figura 2.6. se puede ver un ejemplo de cristal sónico de apreciables dimensiones.



Figura 2. 5. Configuraciones espaciales para un cristal sónico.



Figura 2. 6. Cristal sónico. Escultura de Eusebio Sempere.

Como se comentó anteriormente, los cristales sónicos son construcciones o estructuras periódicas, es decir, el sistema completo podría construirse como repetición continuada de una celda base. A este tipo de construcciones periódicas en las que se repite una celda o módulo continuamente, se conocen con el nombre de *estructura lattice*, y su uso y aplicación ingenieril se extienden por todo el mundo. Cabe destacar que no todas las estructuras lattice son cristales sónicos, puesto que para tener esta consideración deben presentar las propiedades vibratorias características de estas estructuras.

Una de las características más importantes de estos sistemas lattice recae precisamente en su periodicidad geométrica, ya que ésta puede usarse para calcular las respuestas, tanto dinámicas como estáticas, del problema que se quiera estudiar. Esta cualidad es de gran importancia ya que reduce las posibles dificultades geométricas del problema que se quiera analizar así como el tiempo de cálculo necesario para resolverlo.

Este tipo de estructuras están presentes en ámbitos muy dispares como en paneles sándwich, en materiales compuestos o en estructuras tipo cercha o las zonas centrales del cuerpo de un avión. En la naturaleza encontramos otro claro ejemplo de estas estructuras lattice en los panales que crean las abejas. Algunos de estos ejemplos pueden verse en la figura 2.7.

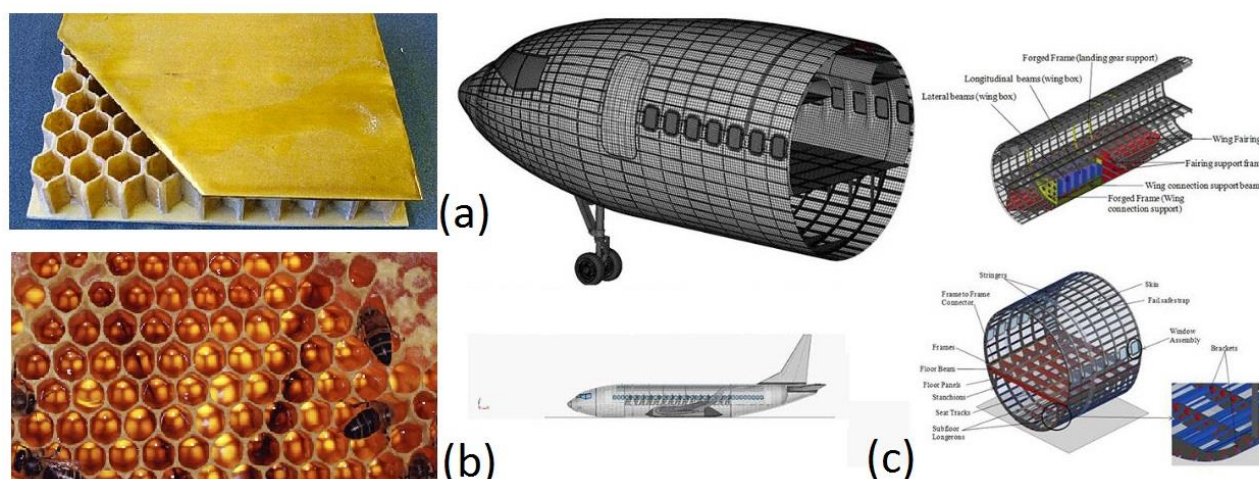


Figura 2. 7. Ejemplos de estructuras lattice en un material compuesto (a), un panel de abejas (b) y en el fuselaje de un avión (c).

Por otro lado, la utilidad de los cristales sónicos como elemento de transmisión o aislamiento de vibraciones es de gran importancia en diversos ámbitos. Tal y como se muestra en la figura 2.8, el espectro fonónico es continuo y engloba desde las frecuencias más bajas o infrasonidos (rondando el orden de magnitud del hercio), el sonido audible (orden de magnitud del kilohercio), los ultrasonidos (megahercios) y hasta las más altas o hipersonidos (gigahercios).

Así mismo, el espectro fonónico acoge tanto a ondas sonoras (sonido) como a ondas térmicas (calor): dos fenómenos físicos que dependen directamente de las vibraciones mecánicas. Una de las principales diferencias entre estos dos fenómenos es que el sonido está formado por ondas que oscilan a frecuencias bajas (del orden de magnitud del kilohercio) y son capaces de propagarse a grandes distancias mientras que las ondas térmicas presentan una frecuencia de oscilación alta (orden de magnitud en torno al terahercio) y su capacidad de propagación es mucho más reducida.

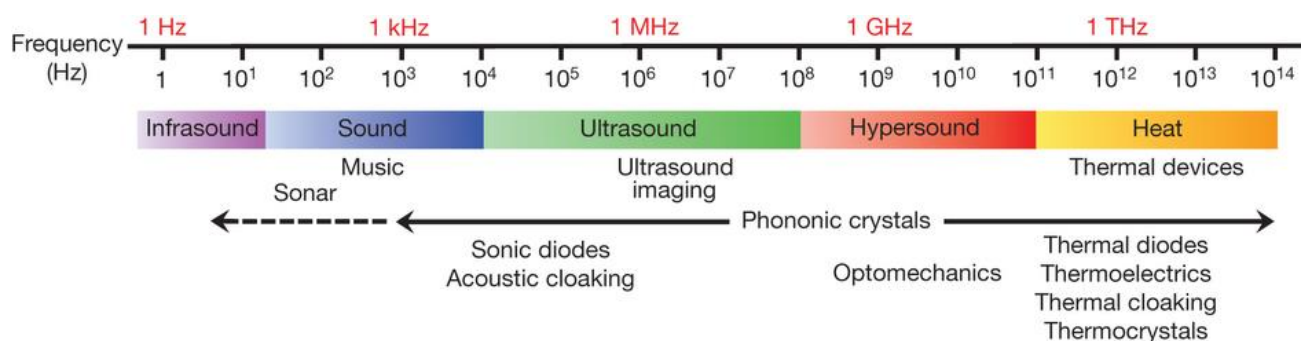


Figura 2. 8. Espectro de ondas.

El funcionamiento de estas estructuras sónicas permite la aparición de rangos de frecuencia prohibidos, es decir, el cristal no permite la propagación de las ondas que inciden sobre su estructura, logrando así la aislación. Estos rangos de frecuencia reciben el nombre de *bandgaps* (bandas prohibidas). En la figura 2.9 se muestra la representación típica de un caso de bandgaps.

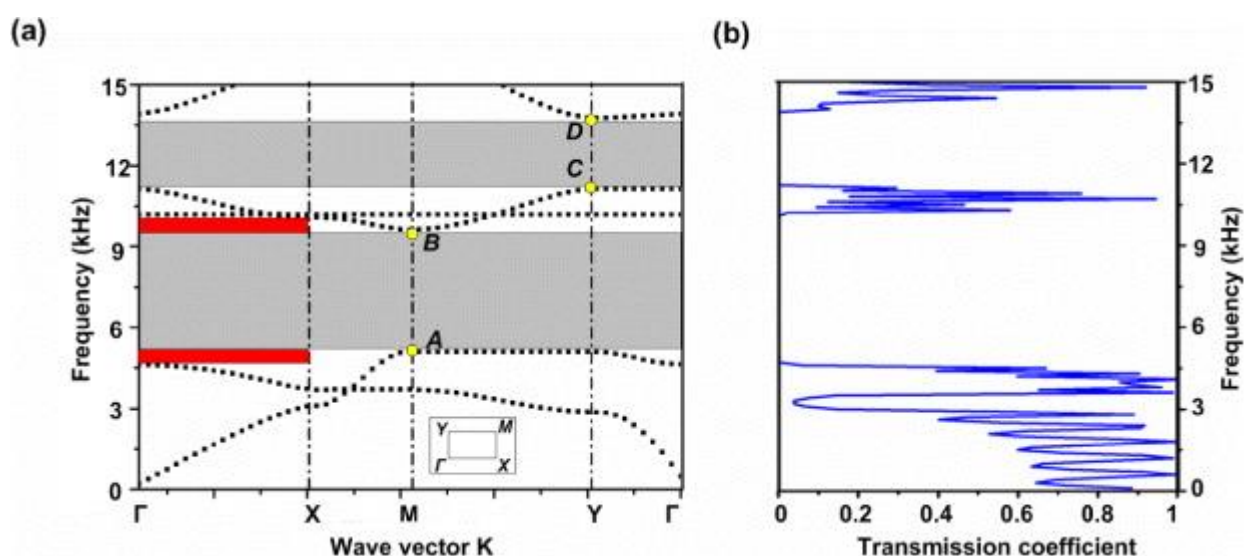


Figura 2. 9. Esquema de un bandgap expresado en frecuencia/vector de onda (a) y en frecuencia/coef. de transmisión (b).

Este Trabajo se centra en el estudio del carácter dispersor que presentan los cristales sónicos. En función de la configuración y las propiedades del cristal, se puede modificar el rango de frecuencias que éste será capaz de dispersar, logrando así un amplio espectro de frecuencias a tratar.

2.3.1. ESTRUCTURA LATTICE

Como se introdujo en el apartado 2.3, una estructura lattice es una estructura creada por repetición de uno o más elementos que componen la estructura completa. Esta repetitividad periódica indica que cada propiedad o comportamiento observado en una celda referencia puede ser observada en cualquiera de las otras celdas del conjunto. Esta propiedad dota a las estructuras lattice de gran importancia en cuanto a sus aplicaciones ingenieriles ya que facilitan enormemente la resolución de problemas que, en origen, pudieran ser considerados mucho más complejos.

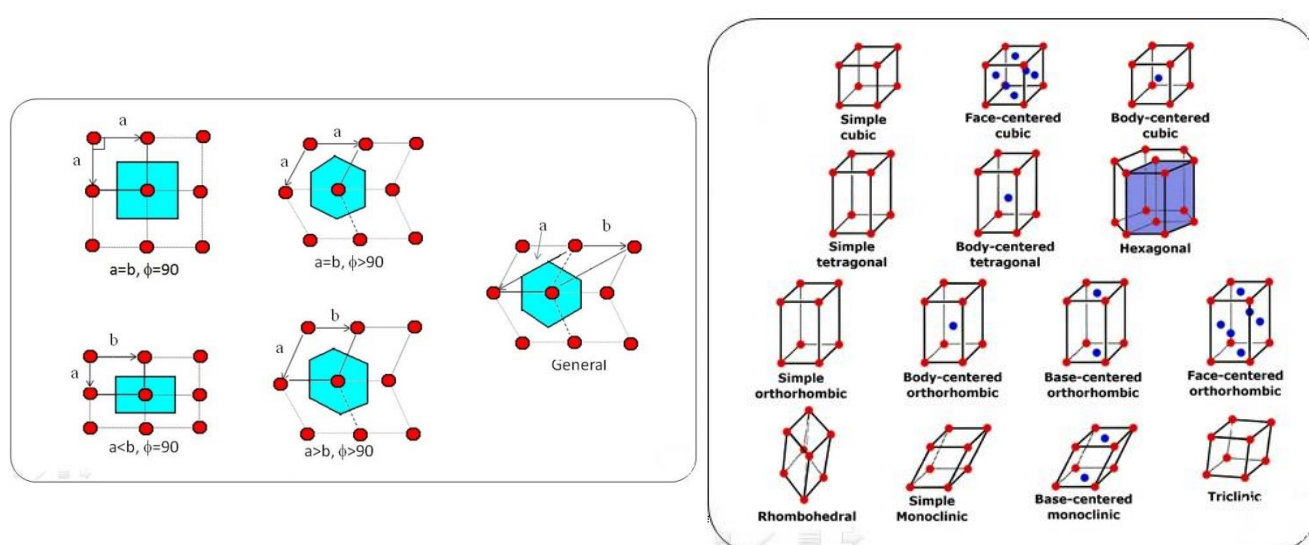


Figura 2. 10. Redes de Bravais para los casos bidimensionales y tridimensionales.

En geometría y cristalografía, existen un tipo especial de estructuras lattice que se conocen como estructuras de Bravais y como demuestra la teoría de grupos [9], hay un número determinado de ellas. Únicamente existe 1 estructura lattice unidimensional (1D), 5 bidimensionales (2D) y 14 tridimensionales (3D) diferentes [10], como se muestra en la figura 2.10. Cabe destacar que, mientras la red de Bravais unidimensional es elemental estando formada por una serie de nodos equidistantes entre ellos, tanto la bidimensional como la tridimensional están definidas por estructuras patrón.

Para constituir una estructura lattice se hace necesario el uso de celdas primitivas o unitarias. Éstas se definen como la menor subdivisión de un sistema complejo que

permita conservar las características generales de toda la retícula y que mediante simple translación de la misma, permite reconstruir completamente la red.

Una red típica R en el espacio \mathbb{R}^n presenta la forma:

$$R = \left\{ \sum_{i=1}^n v_i \vec{a}_i \mid v_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Donde,

- $\{a_1, \dots, a_n\}$ representan una base en el espacio \mathbb{R}^n .

La obtención de la celda primitiva se consigue mediante el trazado de paralelas a los vectores directores, desde sus respectivos extremos hasta el punto donde se cruzan. Existe otro método para conseguir las celdas unitarias que presenta mayores ventajas a la hora de visualizar la red puesto que poseen la misma simetría. A la celda obtenida mediante este método se la conoce como celda de Wigner-Seitz.

Tal y como se recoge en la figura 2.11, para la obtención de esta celda unitaria especial se deben seguir unos pasos concretos:

1. Se parte de una red cristalina de nodos.
2. Se trazan líneas que unan los diferentes nodos de la red.
3. Por el punto medio de estas líneas, y perpendicularmente a ellas, se trazan unos nuevos segmentos.
4. El volumen más pequeño encerrado dentro de estos segmentos constituye la celda primitiva de Wigner-Seitz.

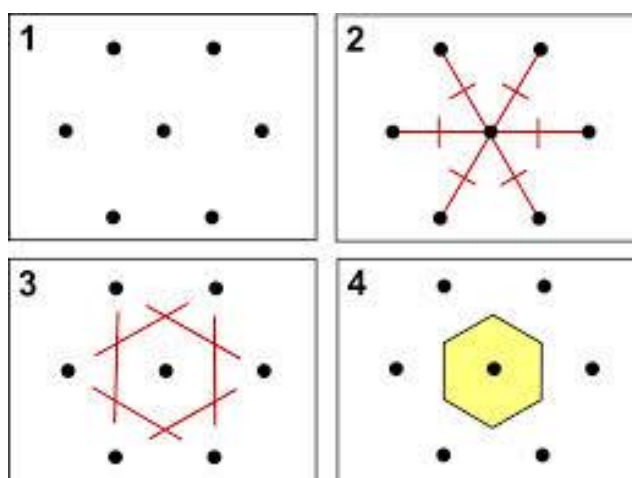


Figura 2. 11. Obtención de la celda primitiva de Wigner-Seitz.

2.3.2. BANDA PROHIBIDA

La teoría de bandas o estructura de bandas muestra ciertas propiedades de interés en los medios continuos y periódicos como es, por ejemplo, las bandas prohibidas. Un átomo en solitario presenta niveles de energía diferenciados, pero cuando muchos átomos se unen constituyendo estructuras sólidas, se considera que las diferencias entre los niveles de energía son tan reducidas que éstos forman bandas continuas de energía. Sin embargo, no todos los niveles de energía de los átomos contienen orbitales, por lo que al unirse puede que se creen intervalos en los que coincidan, sin importar el número de átomos que intervengan en estos niveles vacíos. Este fenómeno físico permite la aparición de brechas energéticas entre las bandas, formando los conocidos como bandgaps.

Estos bandgaps no son más que zonas de impedancia del medio que bloquea la transmisión de energía a través de él. Esta es la razón por la que algunos materiales son o no conductores de la electricidad o del calor. Sin embargo hay materiales que se consideran semiconductores, es decir, que la transmisión de energía a través de ellos depende de factores externos como el estado en el que se encuentren (sólido, líquido o gas), la presión a la que están sometidos o la radiación que les incide.

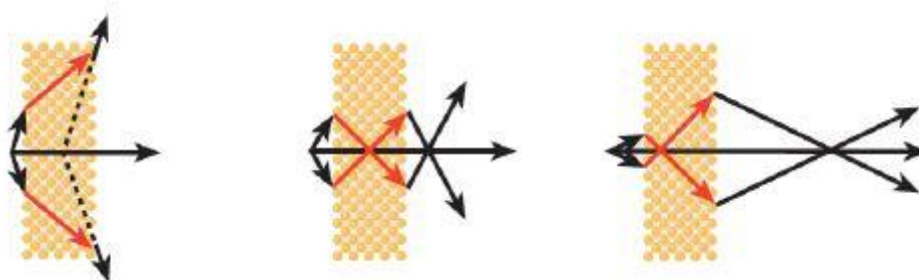


Figura 2. 12. Fenómeno de refracción en un cristal sónico.

Por otro lado los elementos que constituyen el cristal pueden considerarse como difusores, es decir, poseen una resistencia mayor que la del fluido al cual están expuestos. De esta forma, cuando una o varias ondas inciden sobre la estructura del cristal, los difusores provocan reflexiones que interfieren en el comportamiento de las ondas directas. Como se muestra en la figura 2.12, según la configuración del cristal y la frecuencia de la onda incidente, estas interferencias pueden ser constructivas, focalizando y potenciando la onda original, o destructivas, impidiendo la propagación de la onda una vez que ésta entra en el cristal. El rango de frecuencias donde se manifiesta este último comportamiento es la banda prohibida.

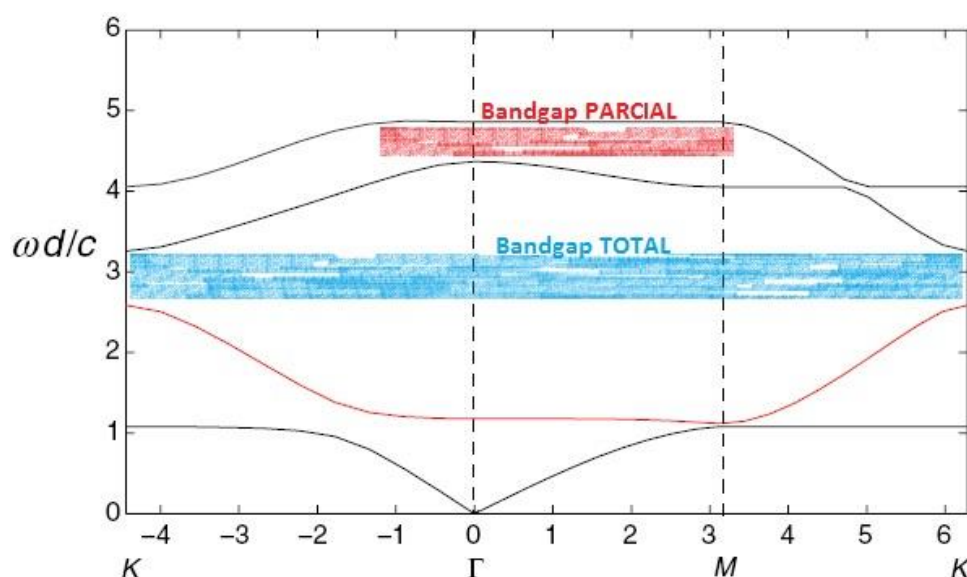


Figura 2. 13. Bandgap total y parcial de una estructura.

Dentro de las bandas prohibidas puede darse el caso en el que una frecuencia este parcial o totalmente prohibida, es decir, si el sistema presenta un bandgap parcial significa que la onda incidente no puede propagarse en una dirección concreta pero sí en otras mientras que si el bandgap es total, no importa en qué dirección incida la onda ya que de ninguna manera será posible su propagación.

En la figura 2.13 se puede observar la presencia tanto de bandgap total (en azul) como parcial (en rojo) para una estructura fonónica. Cada línea ondulada de color de la gráfica hace referencia a una banda o estado de excitación del sistema producido por una onda incidente en las direcciones KR, RM y MK.

CAPITULO 3: FORMULACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este capítulo se centra en exponer el problema estudiado en el Trabajo, sentando la formulación y nomenclatura que se usará a lo largo de los próximos capítulos, más técnicos.

3.1. FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

Con la intención de localizar y analizar los rangos de frecuencias prohibidas en un cristal sónico, se utilizará una estructura tridimensional como la expuesta en el artículo publicado en 2010 por V. A. Eremeyev, E. A. Ivanova y D.A. Indeitsev [11].

Mediante el análisis de estas estructuras podemos mejorar su uso en aplicaciones tecnológicas tales como los láseres ultravioletas (“UV lasers”), swiches ópticos o componentes piezomecánicos [12–16]. Todos éstos están siendo empleados de forma masiva gracias al avance de tecnologías como el PLD o Pulsed Laser Deposition [17–19] (Deposición por Laser Pulsado), la cual permite la construcción precisa de estos cristales sónicos con dimensiones muy reducidas.

El cristal sónico analizado está formado por una placa horizontal, llamada sustrato, que soporta una serie de barras verticales, representando los nano-objetos. La placa está definida en el plano OXZ y ocupa el espacio $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq z \leq b$ mientras que las barras ocupan el dominio $0 \leq y \leq l$ y están situadas con la misma separación unas de otras, tal y como se muestra en la figura 3.1. Obsérvese también que el tamaño de la placa es mucho mayor que el tamaño de las barras.

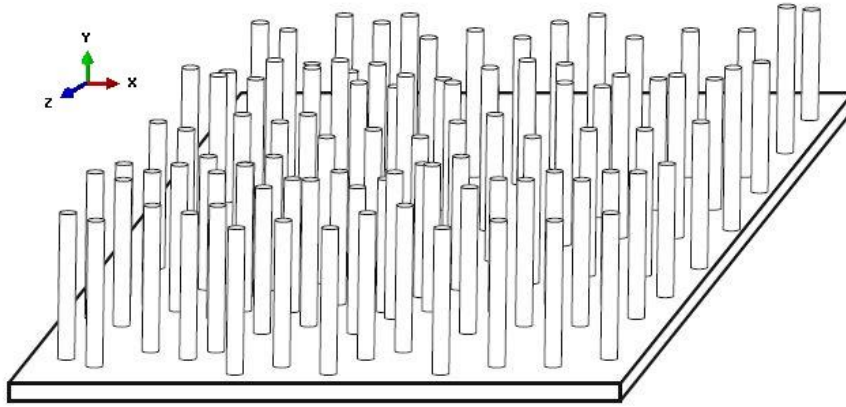


Figura 3. 1. Cristal sónico formado por nano-objetos y sustrato.

El comportamiento vibratorio de las barras queda descrito por la ecuación de las vibraciones laterales sobre una viga, dentro de la teoría clásica de vigas

$$E_b A_b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho_b A_b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

Donde,

- E_b es el módulo de elasticidad o módulo de Young del material.
- A_b es la sección transversal de la barra.
- $f(x, t)$ hace referencia a una fuerza externa.
- ρ_b es la densidad de la barra.

Así mismo, se asume que las barras son infinitamente rígidas, es decir, inextensibles. Esto quiere decir que no existen ni alargamientos ni acortamientos, parciales o totales, en la barra. Dicho de otra forma

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Por otro lado, la ecuación del movimiento de la placa sigue la forma

$$\nabla N + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{mn}|_{(y=0)} \delta(x - x_m) \delta(z - z_n) = \rho_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2}$$

$$\nabla M - n \bar{x} N + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N L_{mn}|_{(y=0)} \delta(x - x_m) \delta(z - z_n) = 0$$

Donde,

- ∇ es el operador nabla en el plano xz. $\nabla = e_1 \frac{\delta}{\delta x} + e_3 \frac{\delta}{\delta z}$
 - e_1 y e_3 son vectores que forman base Cartesiana y son ortogonales a n , vector unitario y vertical con sentido hacia arriba.
- N es el vector de las fuerzas transversales.
- M es el tensor de momentos.
- δ es la función delta de Dirac.
- F_{mn} son las fuerzas longitudinales, para cada barra situada en la posición mn.
- L_{mn} es el vector de momentos flectores, para cada barra situada en la posición mn.
- ρ_s representa la densidad de la placa.
- v_s son los desplazamientos verticales de la placa.

Así mismo, el tensor de momentos se puede expresar en términos de flexión transversal según la formula,

$$M = D \left[\left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} + \vartheta \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} \right) e_1 e_3 - \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} \right) e_3 e_1 + (1 - \vartheta) \frac{\partial^2 v_s}{\partial x \partial z} (e_1 e_1 - e_3 e_3) \right]$$

Donde,

- D representa la rigidez a flexión de la placa. Su valor se obtiene mediante la expresión:

$$D = \frac{E_s h^3}{12(1 - \vartheta^2)}$$

- E_s es el módulo de Young de la placa.
- h es el espesor de la placa.
- ϑ es el coeficiente de Poisson.

Eliminando el vector de fuerzas transversales N de la primera ecuación que define el movimiento de la placa y haciendo uso de la ecuación que relaciona el tensor de momentos con la flexión transversal, se define la ecuación de movimiento de la placa como una ecuación escalar de la forma:

$$D\Delta\Delta v_s + \rho_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \{F_{mn}|_{(y=0)} \delta(x-x_m) \delta(z-z_n) - \nabla \cdot [n \bar{x} L_{mn}|_{(y=0)} \delta(x-x_m) \delta(z-z_n)]\}$$

Las deformaciones presentes en el plano xz son despreciables, por lo que las uniones cinemáticas entre la placa y las barras pueden expresarse como:

$$u_{mn}|_{(y=0)} = 0$$

$$v_{mn}|_{(y=0)} = v_s|_{(x=x_m), (z=z_m)}$$

$$\varphi_{mn}|_{(y=0)} = \varphi_s|_{(x=x_m), (z=z_m)}$$

Donde,

- los subíndices “mn” son números cardinales y denotan la posición de la barra.
- El subíndice “s” se refiere al sustrato (placa).
- u indica los desplazamientos horizontales en el plano x,z .
- v indica desplazamientos en el eje vertical, eje y .
- φ denota giros respecto al eje vertical, eje y .

La parte superior de las barras están libres, por lo cual se pueden aplicar las condiciones de contorno siguientes:

$$F_{mn}|_{(y=l)} = 0$$

$$T_{mn}|_{(y=l)} = 0$$

$$L_{mn}|_{(y=l)} = 0$$

Donde,

- F_{mn} es el vector de fuerzas longitudinales, para cada barra situada en la posición mn.
- T_{mn} es el vector de esfuerzos cortantes, para cada barra situada en la posición mn.

- L_{mn} es el vector de momentos flectores, para cada barra situada en la posición mn.

Por último, se considera el problema dentro de las vibraciones libres, es decir, el comportamiento del cristal sónico será evaluado en ausencia de fuerzas externas que puedan sobreexcitar el sistema.

Para llevar a cabo el objetivo de este Trabajo, se realiza el estudio vibratorio de un cristal sónico conformado por una placa de pequeño espesor y una matriz de 11x11 vigas con uno de sus extremos unidos a la placa y otro totalmente libre, tal y como se observa en la figura 3.2. Las dimensiones y propiedades del sistema completo se detallan en las tablas 3.1 y 3.2.

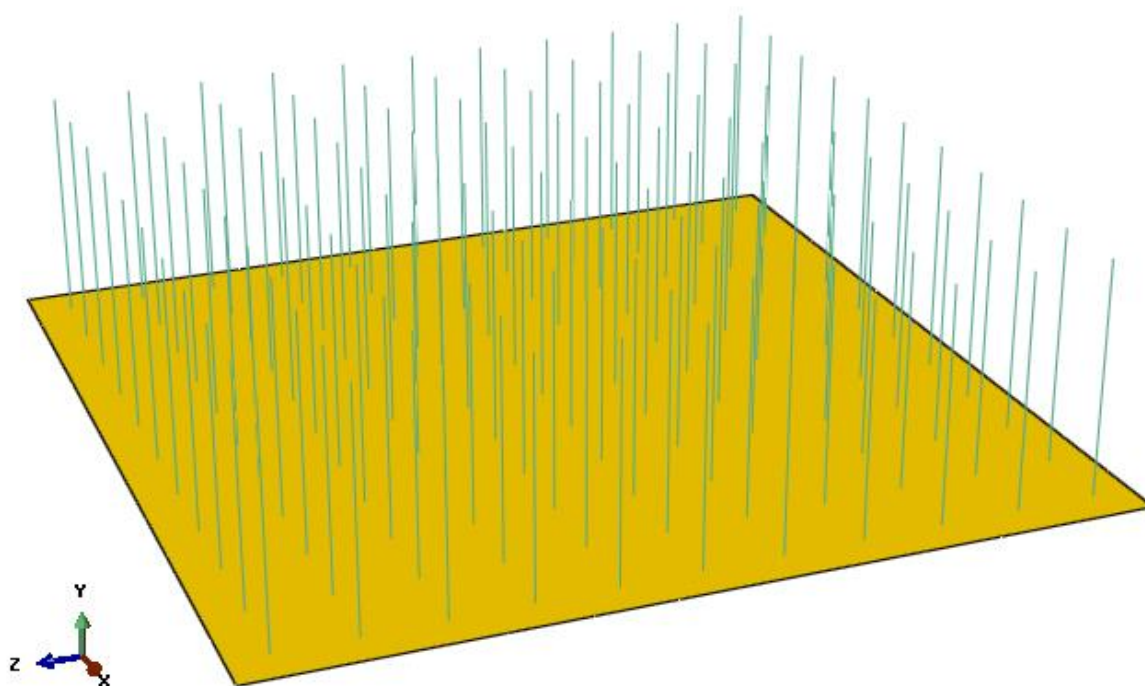


Figura 3. 2. Cristal sónico completo, formado por una matriz de 11x11 barras.

	Longitud en eje x [m]	Longitud en eje y [m]	Espesor [m]	Densidad [kg/m ³]	Módulo de Young [GPa]	Coef. De Poisson	Nº de barras en eje x	Nº de barras en eje y
Placa	0.55	0.55	0.002	2700	72	0.3	11	11

Tabla 3. 1. Dimensiones y propiedades de la placa del cristal sónico.

	Longitud [m]	Radio [m]	Densidad [kg/m ³]	Módulo de Young [GPa]	Coef. De Poisson
Barras	0.150	0.005	2700	72	0.3

Tabla 3. 2. Dimensiones y propiedades de las barras del cristal sónico.

3.2. TRATAMIENTO DEL PROBLEMA

Como se comentó en el apartado 3.1, la estructura lattice del cristal sónico se considera tridimensional (3D) e infinita por lo que, a la hora de realizar los diferentes análisis planteados en el Trabajo, se tomó la decisión de simplificar el modelo descrito en dicho apartado para facilitar y agilizar los tiempos de cálculo necesarios. Gracias a la periodicidad y simetría presente en las estructuras lattice, el comportamiento del modelo completo se presupone idéntico al comportamiento que tendrá una celda base tomada del sistema.

Para llevar a cabo esta simplificación, se hace uso del *Teorema de Floquet-Bloch* [20].

3.2.1. TEOREMA DE FLOQUET-BLOCH

Se presenta a continuación una breve explicación del *Teorema de Floquet-Bloch*. Cabe destacar que, normalmente, se conoce como *Teorema de Floquet* al ser aplicado a estructuras periódicas y unidimensionales mientras que recibe el nombre de *Teorema de*

Bloch para los casos bidimensionales, por lo que desde ahora hablaremos de *Teorema de Bloch*. Estos principios se han usado en numerosos estudios como pueden ser, por ejemplo, el estudio de propagación de ondas en sólidos cristalinos y cristales fotónicos (Brillouin, 1953; Kittel, 1962) o en sistemas mecánicos de paneles rígidos para comprender la respuesta ante las vibraciones (Mead, 1973, 1996).

El teorema de Bloch considera todas las uniones de cualquier estructura lattice como una serie de puntos concretos, llamados puntos de lattice, y éstos a su vez están asociados a un conjunto de vectores base. A este conjunto formado por los puntos lattice y los vectores base se le conoce como *lattice directo*.

Las ecuaciones del teorema pueden aplicarse a los límites de una celda primitiva de la estructura directa y es entonces cuando se habla de “*primera zona de Brillouin*” que es el nombre que recibe la celda base irreducible definida unívocamente dentro del espacio recíproco [20].

Una vez definida correctamente la primera zona de Brillouin, el lattice al completo puede ser generado mediante la repetición de esta celda siguiendo los vectores base e_i . Supongamos entonces que llamamos r_j a los puntos que forman la celda unidad entonces esto corresponderá a un sub-conjunto de nodos del elemento modelo de la celda unidad. Llamaremos $\vec{u}(r_j)$ al desplazamiento de un punto del lattice en referencia a la celda unidad.

Admitiendo una solución plana a la ecuación de onda, entonces $\vec{u}(r_j)$ es de la forma:

$$\vec{u}(r_j) = \vec{U}_j e^{(i\omega t - k r_j)}$$

Donde,

- \vec{U}_j es la amplitud.
- ω es la frecuencia en rad/s.
- k es el vector de onda del plano de onda.

Supongamos una estructura lattice formada por barras perpendiculares entre sí. Haciendo referencia a una celda unidad escogida, en la figura 3.3 representada por la zona coloreada de la estructura lattice, se tiene el par de números (n_1, n_2) que identifican cualquier otra celda de la estructura tal que:

- n_1 hace referencia al desplazamiento a lo largo de la dirección e_1 .
- n_2 denota el desplazamiento a lo largo de la dirección e_2 .

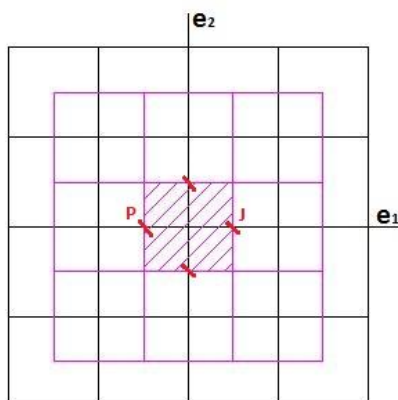


Figura 3. 3. Estructura lattice y celdas primitivas.

Así mismo, un punto “P” de la celda (n_1, n_2) se corresponde con otro punto “J” de la celda referencia de forma que

$$r = r_j + n_1 e_1 + n_2 e_2$$

Finalmente, aplicando el teorema de Bloch, se obtiene la relación de desplazamientos que existe entre 2 puntos que se encuentran en diferentes celdas:

$$\vec{u}(r) = \vec{U}_j e^{k(r-r_j)} = \vec{U}_j e^{(n_1 k_1 + n_2 k_2)}$$

Donde,

- k_1 y k_2 representan los componentes del vector de onda, \vec{k} , a lo largo de las direcciones e_1 y e_2 , dentro de la primera zona de Brillouin (ver figura 3.4).

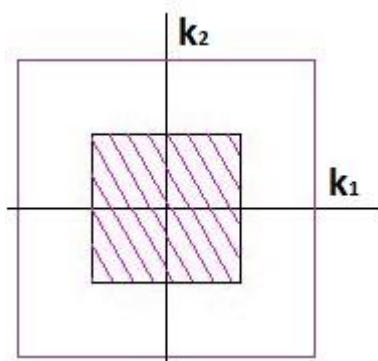


Figura 3. 4. Zona de Brillouin dentro de la celda primitiva.

Así mismo, k_1 y k_2 se pueden escribir de la siguiente forma,

$$k_1 = \delta_1 + i\varepsilon_1 = ke_1 \qquad k_2 = \delta_2 + i\varepsilon_2 = ke_2$$

Donde,

- δ representa la atenuación de la onda en su paso de una celda a otra.
- ε representa el cambio de fase en la onda a su paso de una celda a otra.

El Teorema de Bloch define, por tanto, que para cualquier estructura periódica, el cambio en la amplitud de la onda a su paso por diferentes celdas, siendo una propagación sin atenuación, no depende de la localización de la celda dentro del sistema completo. Es decir, gracias a este principio podemos entender el comportamiento del conjunto completo analizando únicamente una celda del mismo.

3.2.2. PLANTEAMIENTO DEL CASO BASE

Para llevar a cabo el objetivo de este Trabajo, se realiza el estudio vibratorio de una celda unitaria, formando en sí misma un cristal sónico, conformada por una placa de pequeño espesor y una barra colocada centrada y perpendicularmente a la base. La viga presenta uno de sus extremos unidos a la placa y otro totalmente libre, tal y como se observa en la figura 3.5. Las dimensiones y propiedades de la placa y de la barra se muestran, respectivamente, en las tablas 3.3 y 3.4

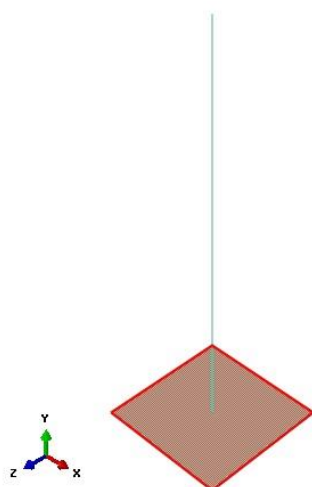


Figura 3. 5. Celda unitaria del cristal sónico.

	Largo [m]	Ancho [m]	Espesor [m]	Densidad [kg/m ³]	Módulo de Young [GPa]	Coeficiente de Poisson
PLACA	0.050	0.050	0.002	2700	72	0.3

Tabla 3. 3. Dimensiones y propiedades de la placa, dentro de la celda unitaria.

	Largo [m]	Radio [m]	Densidad [kg/m ³]	Módulo de Young [GPa]	Coeficiente de Poisson
BARRA	0.150	0.005	2700	72	0.3

Tabla 3. 4. Dimensiones y propiedades de la barra, dentro de la celda unitaria.

Como se expuso en los apartados 3.2 y 3.2.1, el comportamiento de que se muestra en una celda unitaria, o celda referencia, es el mismo que se observaría al estudiar un sistema mayor formado por una matriz de NxM celdas. Por tanto, no se hace necesario analizar estructuras complejas y periódicas. Atendiendo a este criterio, queda definida la geometría de la celda unidad que será la base de los análisis posteriores de este trabajo.

Una vez definida la geometría del problema, el siguiente paso es establecer las diferentes condiciones tanto propias del sistema como de contorno, siendo estas últimas de gran importancia ya que permitirán analizar el cristal ante diferentes casos de vibración. La simulación de las diferentes condiciones de contorno se consigue mediante el uso de condiciones de ligadura entre los lados opuestos de la celda.

Las condiciones propias del sistema se definieron en el apartado 3.1, donde se exponía el estudio de Eremeyev, y son las siguientes:

Referente a la barra, se considera que los extremos superiores están libres así como se prohíben los giros en el eje longitudinal (eje y) de toda la barra, es decir,

$$\varphi_y^b = 0$$

Por otro lado, la barra se considera inextensible, es decir, que no sufre

alargamientos ni acortamientos parciales o totales. Esta última condición se puede llevar a cabo asumiendo que la barra es infinitamente rígida. Para llevar a cabo esta condición, se puede considerar que o bien el módulo de Young o bien la sección transversal de la barra son muy elevados o bien suponer que todos los puntos que conforman el objeto barra poseen el mismo desplazamiento vertical que el nodo de unión entre la barra y la placa. Finalmente se optó por la segunda opción, quedando las condiciones de desplazamiento vertical en la barra como sigue:

$$v_b = v|_{(0.5,y,0.5)} = v|_{(0.5,0,0.5)}$$

Mediante la restricción de desplazamientos y giros longitudinales en la barra, se eliminan los modos de vibración longitudinales y torsionales, quedando únicamente los modos de vibración debidos a esfuerzos flectores.

En cuanto a la placa, se desprecian los desplazamientos en el plano horizontal, tanto en la dirección del eje x como en la del eje z, lo que implica que los giros en la dirección del eje y tampoco se consideran. Escrito de otra forma,

$$u_x^s = u_z^s = 0$$

$$\varphi_y^s = 0$$

La placa se considera simplemente apoyada en dos de sus extremos pero, al realizar el estudio sobre una celda referencia del sistema esta condición no aplica. Sin embargo, resulta de interés simular diferentes condiciones de contorno dentro de la celda base para obtener resultados en los diferentes comportamientos que puede presentar el sistema.

Es en este punto cuando la aplicación del Teorema de Bloch (ver apartado 3.2.1) es de gran ayuda ya que, además de simplificar los cálculos en el análisis, nos permite imponer las diferentes condiciones de ligadura en los contornos de la celda, pudiendo simular casos en los que la dirección de incidencia que tiene la onda sobre la estructura va variando, así como las longitudes de estas ondas, y obtener todos los resultados necesarios.

Teniendo definida nuestra celda, bidimensional y cuadrada, el Teorema de Bloch aplica como sigue.

Supongamos un punto P situado en nuestra celda base, entonces su posición queda

definida como

$$r_p(0,0)$$

Por otro lado, tenemos otro punto R situado en otra celda del sistema, es decir, una celda (n_1, n_3) . Por tanto, la posición de este punto R será,

$$r_R(n_1, n_3) = r_p(0,0) + n_1 e_1 + n_3 e_3$$

Conocida la ecuación del movimiento ondulatorio para el punto P en la celda $(0,0)$

$$\vec{u}(r_p(0,0)) = \vec{U} e^{i(\vec{k} r_p(0,0) - \omega t)}$$

Podemos aplicar el teorema de Bloch,

$$\vec{u}(r_R(n_1, n_3)) = \vec{u}(r_p(0,0)) e^{i\vec{k}[r_R(n_1, n_3) - r_p(0,0)]} = \vec{u}(r_p(0,0)) e^{i\vec{k}[n_1 e_1 + n_3 e_3]}$$

Y aplicando la condición de lattice cuadrado,

$$\vec{u}(r_R(n_1, n_3)) = \vec{u}(r_p(0,0)) e^{iL(n_1 k_1 + n_3 k_3)}$$

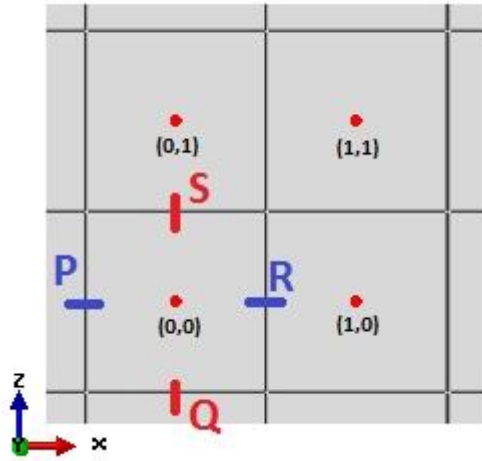


Figura 3. 6. Vista cenital de varias celdas unitarias dentro del cristal sónico.

De esta forma, para los puntos P y Q – pertenecientes a la celda $(0,0)$ – y para los puntos R y S – pertenecientes a las celdas $(1,0)$ y a la $(0,1)$ respectivamente – que se muestran en la figura 3.6, se pueden establecer condiciones de ligadura para cada uno de los desplazamientos que interesa restringir. Finalmente se

obtiene que las condiciones de ligadura para estos puntos son como sigue,

$$\vec{u}_R = \vec{u}_P e^{iLk} = \vec{u}_P \cos(L_1 k_1 + L_3 k_3)$$

$$\vec{u}_S = \vec{u}_Q e^{iLk} = \vec{u}_Q \cos(L_1 k_1 + L_3 k_3)$$

Donde,

- L_1 y L_3 representan los componentes del vector distancia, \vec{L} , a lo largo de las direcciones e_1 y e_3 , dentro de la primera zona de Brillouin.
- k_1 y k_2 representan los componentes del vector de onda, \vec{k} , a lo largo de las direcciones e_1 y e_2 , dentro de la primera zona de Brillouin.

Para obtener los diferentes valores del vector \vec{k} , se realiza lo que se conoce como barrido de ondas. Es decir, dentro de la primera zona de Brillouin, se siguen unas direcciones concretas para estudiar el comportamiento del sistema ante diferentes longitudes y direcciones de incidencia de onda.

En este tipo de análisis se puede optar por hacer infinidad de recorridos, siendo el recorrido OA, AB, BO el más extendido dado que, siguiendo este itinerario de onda, se recorren las direcciones principales en una celda bidimensional. Estas direcciones pueden observarse en la figura 3.7.

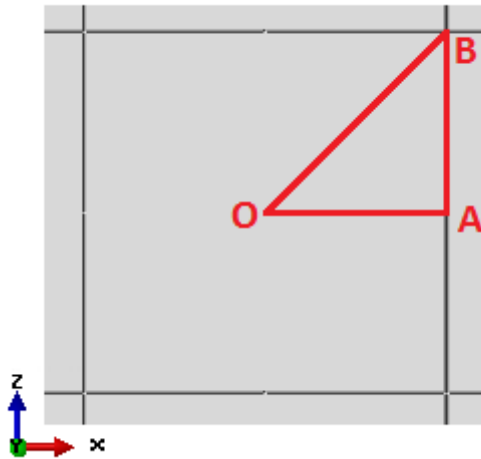


Figura 3. 7. Direcciones de incidencia de la onda.

Por otro lado, una vez definida la dirección de incidencia de la onda sobre la estructura, se calcula la respuesta de ésta ante diferentes longitudes de onda. Para ello

se divide cada una de las direcciones de incidencia en segmentos, obteniendo en cada punto intermedio un valor concreto de longitud de onda. En este Trabajo se ha decidido dividir cada una de las direcciones en 5 tramos ya que se considera una subdivisión suficiente para obtener resultados veraces.

Cabe destacar que, cuando el valor del vector de onda es nulo, $\vec{k} = (k_1, k_3) = (0,0)$, el sistema se comporta como un sólido rígido en movimiento de traslación pura. Esto puede demostrarse ya que la relación que une a un vector de onda con su consiguiente longitud de onda, λ , es como sigue:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Por lo que, si el vector de onda se anula, la longitud de onda correspondiente se hace infinitamente grande. Esto desemboca en el movimiento de traslación pura sin vibración. Los valores de los coeficientes obtenidos para los diferentes puntos dentro de la primera zona de Brillouin quedan como muestran las tablas 3.5, 3.6, 3.7.

	Segmento δ	Coeficiente de ligadura en el eje horizontal [ox]	Coeficiente de ligadura en el eje vertical [oz]
DIRECCION OA	OA-0	1	1
	OA-1	0.809	1
	OA-2	0.309	1
	OA-3	-0.309	1
	OA-4	-0.809	1
	OA-5	-1	1

Tabla 3. 5. Valores de los coeficientes de ligadura en la dirección OA.

	Segmento δ	Coeficiente de ligadura en el eje horizontal [ox]	Coeficiente de ligadura en el eje vertical [oz]
DIRECCION AB	AB-0	-1	1
	AB-1	-1	0.809
	AB-2	-1	0.309
	AB-3	-1	-0.309
	AB-4	-1	-0.809
	AB-5	-1	-1

Tabla 3. 6. Valores de los coeficientes de ligadura en la dirección AB.

	Segmento δ	Coefficiente de ligadura en el eje horizontal [ox]	Coefficiente de ligadura en el eje vertical [oz]
DIRECCION BO	BO-0	-1	-1
	BO-1	-0.809	-0.809
	BO-2	-0.309	-0.309
	BO-3	0.309	0.309
	BO-4	0.809	0.809
	BO-5	1	1

Tabla 3. 7. Valores de los coeficientes de ligadura en la dirección BO.

Aunque el cálculo se ha llevado para 2 puntos concretos de la celda, los puntos P y Q, estas condiciones son aplicables a todos los puntos que forman la línea fronteriza del lattice. De esta forma quedan ligados en su totalidad los contornos de la celda referencia.

La ecuación obtenida con anterioridad es genérica para cualquier desplazamiento o giro de los puntos del sistema. Siguiendo la formulación original del problema de Eremeyev, se han ligado los desplazamientos verticales (u_y) y los giros en los ejes horizontales (φ_x y φ_z), ya que estos son los únicos grados de libertad que poseía el sistema.

Una vez que todas las condiciones han sido impuestas en la estructura se realiza el análisis vibratorio, mediante el código de elementos finitos (MEF) Abaqus, para resolver las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la misma.

3.2.3. PARAMETRIZACION DEL PROBLEMA

Como ya se expuso con anterioridad en los objetivos del Trabajo, se considera de interés estudiar la respuesta que muestra el sistema ante diferentes configuraciones.

Mediante el análisis paramétrico de la estructura se puede valorar la influencia que tienen ciertas propiedades, también llamadas parámetros, en el comportamiento difusor del cristal sónico. Por lo tanto, se antoja de vital importancia identificar de antemano aquellos parámetros que pueden resultar de interés y que reflejen, en la solución final y de forma

más significativa, las variaciones que se esperan.

Para llevar a cabo la identificación de estos parámetros de interés se realizó un estudio adimensional de la ecuación de movimiento del sistema, dando como resultado 3 grupos adimensionales:

$$C_1 = \frac{\rho_s h L_s}{\rho_b A} \frac{E_s I}{D L_s} \left(\frac{L_s}{l_b} \right)^4$$

$$C_2 = \frac{E_s I}{D L_s} \left(\frac{L_s}{l_b} \right)^3$$

$$C_3 = \frac{E_s I}{D L_s}$$

Donde,

- Los subíndices “s” y “b” hacen referencia a las propiedades de la placa y de la barra, respectivamente.
- ρ es la densidad.
- h es el espesor de la placa.
- L es la longitud característica de la placa-celda unitaria.
- E es el módulo de elasticidad o Módulo de Young.
- I es el momento de inercia de la barra respecto a la sección transversal y se obtiene de la expresión:

$$I = \frac{1}{64} \pi r^4$$

- Donde r es el radio característico de la barra.
- A es la sección transversal de la barra y se puede obtener de la fórmula:

$$A = \pi r^2$$

- Donde r es el radio característico de la barra.
- D es el módulo de rigidez de la placa.
- l es la longitud característica de la barra.

Para evitar modificar las dimensiones principales de la celda unitaria, se mantienen constantes los parámetros referentes a las longitudes características de la placa y de la

barra, L_s y l_b respectivamente. Por lo tanto, los conjuntos que se modifican son el C_1 y C_2 , dando lugar a nuevos grupos adimensionales que siguen la siguiente forma:

$$G_1 = \frac{\rho_s h L_s}{\rho_b A}$$

$$G_2 = \frac{E_s I}{D L_s}$$

Finalmente, dentro de estos grupos, se decide mantener constantes todos los parámetros a excepción de la densidad y el radio de la barra, ρ_b y r respectivamente. Esta elección está basada en la futura posibilidad de crear cristales sónicos, que se adapten con mayor precisión a las condiciones requeridas, mediante el uso de materiales diferentes o tamaños de barras diferentes.

Cabe destacar que, si bien el radio de la barra no queda explícitamente expuesto en los grupos G_1 y G_2 , esta propiedad queda englobada dentro de los parámetros referentes a la inercia (I) y a la sección (A) de la propia barra.

Para valorar cómo afectan los parámetros en la aparición de los bandgaps, se estudia el comportamiento del cristal ante 16 casos posibles que se generan al modificar el radio o la densidad de las barras, bien por separado cada uno o bien a la vez.

En la tabla 3.8 se recoge, de forma resumida, todos los casos generados y que serán explicados más adelante.

		RADIO			
		$0.5r$	r	$2r$	$3r$
DENSIDAD	$0.5\rho_b$	P	D	H	L
	ρ_b	M	A	E	I
	$2\rho_b$	N	B	F	J
	$3\rho_b$	O	C	G	K

Tabla 3. 8. Casos planteados para analizar.

Esto quiere decir que el caso de referencia es el llamado “caso A” ya que posee un valor para el radio y la densidad sin modificar de los originales (ver tabla 3.3 y 3.4). Por otro lado, el “caso O” será aquel en el cual el radio de la barra sea la mitad del radio referencia y la densidad de la barra sea el doble del valor que se considera en el “caso A”.

A modo de aclaración, en la tabla 3.9 se presentan los valores del radio y la densidad de las barras para cada uno de los casos.

CASO	P	M	N	O	D	A	B	C
DENSIDAD [Kg/m ³]	1350	2700	5400	8100	1350	2700	5400	8100
RADIO [m]	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050
CASO	H	E	F	G	L	I	J	K
DENSIDAD [Kg/m ³]	1350	2700	5400	8100	1350	2700	5400	8100
RADIO [m]	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0150	0.0150	0.0150	0.0150

Tabla 3. 9. Resumen de propiedades importantes en los casos analizados.

CAPITULO 4: METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

En este capítulo se plantea tanto la metodología de trabajo que se ha llevado a cabo durante el transcurso del Trabajo como la implementación realizada dentro del código comercial escogido. A continuación se presenta el método utilizado para la realización de este Trabajo.

4.1. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM)

El Método de los Elementos Finitos, también conocido como MEF o FEM en inglés (Finite Element Method), se considera una de las herramientas más útiles, versátiles y potentes que puede ser usada actualmente para resolver una amplia cantidad de problemas ingenieriles. Este método se aplica a gran variedad de problemas de diferentes campos de estudio como en problemas de transferencia de calor, electromagnetismo, comportamiento mecánico de componentes aeroespaciales o análisis estructurales.

El MEF se basa en la aproximación para obtener la solución de los problemas continuos. Esto se lleva a cabo mediante la transformación de un sólido, de naturaleza continua, en un modelo discreto aproximado. Este proceso recibe el nombre de *discretización del modelo*.

El cuerpo a estudio se divide en un número finito de elementos, siendo este número variable en función del nivel de detalle que se desee. Tanto las propiedades como las ecuaciones constitutivas del objeto se toman sobre estos elementos, los cuales poseen unos puntos denominados nodos. Estos nodos son los puntos de unión entre los diferentes elementos.

La respuesta que cada elemento presenta está definida a partir de los nodos que lo conforman, gracias a las denominadas *funciones de interpolación o funciones de forma*. Mediante estas funciones se definen, de manera única, los desplazamientos de cada elemento expresados en términos de los desplazamientos que sufren los nodos. Por lo tanto, se trata de una aproximación de los valores conociendo un número determinado y

finito de puntos.

La relación que presentan los elementos, una vez se han tenido debidamente en cuenta las condiciones de contorno pertinentes, desemboca en un sistema de ecuaciones cuyas soluciones permitirán obtener resultados mediante los cuales se conocerá como se comporta el modelo continuo.

En el mercado hay gran variedad de programas informáticos que permiten aplicar el Método de Elementos Finitos para la resolución de problemas. En este Trabajo se ha optado por la utilización del código comercial ABAQUS.

4.2. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO EN EL CASO BASE

Mientras que para el estudio de problemas de dimensiones macroscópicas se pueden usar técnicas experimentales para medir la respuesta vibratorio de objetos [21] (análisis espectral o análisis de orbita entre otras muchas) en escalas micro y nanoscópicas surgen ciertos problemas que impiden el uso de éstas [22].

Por ejemplo, uno de los métodos experimentales más extendidos para obtener las amplitudes de vibración de un cuerpo es el uso de láseres ópticos. Este método consiste en situar el objeto a estudio sobre un chasis y se ilumina mediante un láser mientras que otro laser permite detectar la amplitud de vibración que posee un punto concreto del objeto. Si el tamaño del objeto que se quiere estudiar es inferior al tamaño de la longitud de onda del láser, sería casi imposible realizar una medición fiable del cuerpo.

La aplicación de programas informáticos para la resolución de problemas de esta índole es de gran ayuda ya que permiten obtener resultados muy fiables así como ahorrar una gran cantidad de tiempo y costes.

A la hora de poder analizar el cristal sónico en ABAQUS, además de introducir la geometría y propiedades físicas del sistema, es necesario asignar los tipos de elementos que se van a utilizar a cada uno de los componentes de la estructura y el tipo de análisis que se va a efectuar.

Así, para la barra, se utiliza un elemento tridimensional, deformable y tipo viga, con una sección circular maciza. Dentro de todos los tipos de vigas que se pueden

seleccionar dentro del código comercial ABAQUS [23] se eligió el tipo B33, que corresponde a las vigas de Euler–Bernoulli. Es importante destacar que en este tipo de elementos tipo viga hay que fijar la orientación que se desea tener en ellos. En secciones circulares no es tan importante debido a la doble simetría de la sección, pero en perfiles de vigas tipo I o H habría que tenerlo muy en cuenta. Por otro lado, para simular la placa se optó por un elemento tipo *shell* (placa), concretamente el elemento S4R fue el elegido ya que cumple con los requerimientos necesarios para poder considerar la placa dentro de la *Teoría de Placas de Kirchhoff*.

Una vez modelados los elementos, se necesita especificar las propiedades físicas y elásticas que van a tener para que el programa identifique los elementos como materiales. Hasta ahora se tiene una placa y una viga por separado, cada uno con sus propiedades y dimensiones correspondientes (ver tablas 3.3 y 3.4). Para conformar el cristal sónico hay que hacer uso del comando *merge*, dentro del módulo *assembly* (ensamblaje). En este módulo podemos colocar la placa y la barra en la posición que se desee y, una vez utilizado el comando *merge*, el programa entiende que tanto la barra como la placa forman parte de un mismo conjunto, por lo que se moverán como si fueran un solo cuerpo. A partir de aquí ya se puede hablar de celda unitaria.

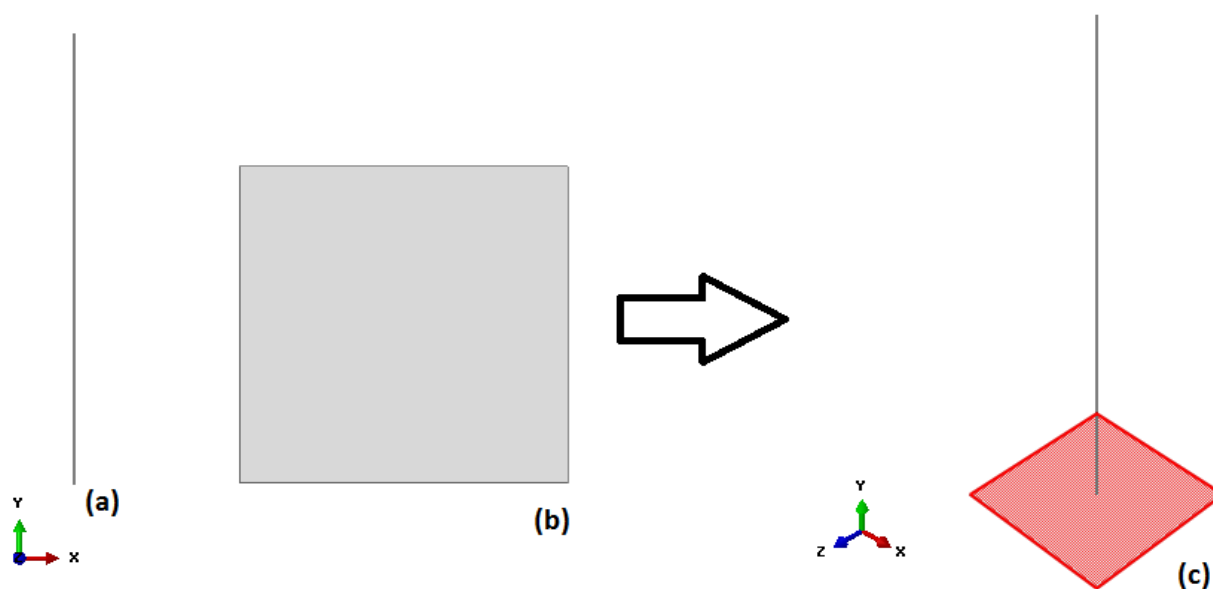


Figura 4. 1. Barra (a), placa (b) y celda unitaria (c), modelados en ABAQUS.

Una vez la celda unitaria ha quedado definida, debemos mallar el modelo para establecer sobre qué puntos se van a resolver las ecuaciones constitutivas del sistema (ver apartado 4.1). El mallado se puede hacer variando la geometría y/o dimensiones de los elementos que lo conforman, con lo que se obtienen un mayor o menor número de puntos a estudiar. Cabe destacar que cuantos más elementos constituyan la malla mayor precisión se van a obtener en los resultados pero también aumentan el tiempo y potencia de cálculo necesarios para resolver estas ecuaciones constitutivas.

En este Trabajo se decidió realizar una malla lo más estructurada posible, para facilitar el proceso de cálculo, formada por elementos tetraédricos y de un tamaño aproximado de 0.015 m, lo que genera un total de 751 elementos dentro de la malla. La figura 4.2 muestra el mallado que se realizó en la celda unitaria.

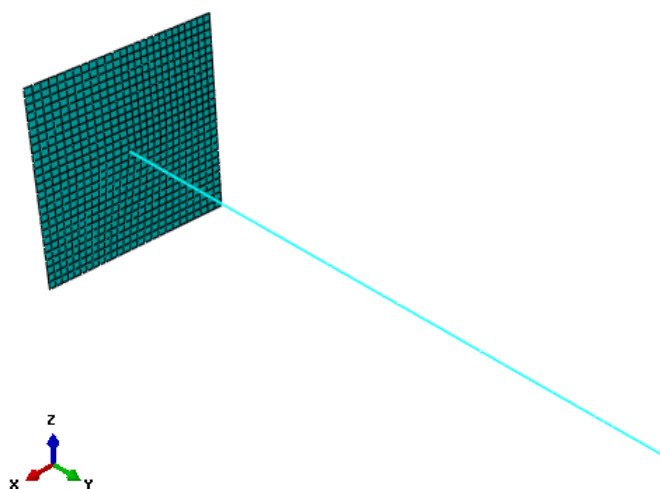


Figura 4. 2. Mallado de la celda unitaria en ABAQUS.

Una vez definidos los elementos y nodos que forman la malla, el siguiente paso es aplicar las condiciones de contorno que se consideran en este Trabajo (ver apartado 3.1). Entre estas condiciones de contorno, destaca la implementación de las condiciones de ligadura que se imponen en los bordes de la placa, las cuales permiten simular las diferentes longitudes de onda a las que se va a someter el sistema durante el análisis. Para ello, dentro del módulo *interaction*, se deben crear una a una, y para cada uno de los nodos que forman los bordes de la placa, estas condiciones. Dentro de este módulo,

en el menú de *constraints*, se eligen las del tipo *equation*, ya que este tipo de restricción es la que permite introducir los coeficientes [23] obtenidos por el Teorema de Bloch. La figura 4.3 muestra la celda unitaria con las condiciones de contorno impuestas así como el cuadro de diálogo del programa donde poder rellenar los datos necesarios para establecer las condiciones de ligadura. Como nota añadida, cabe destacar que para poder aplicar este tipo de condiciones se necesita crear *sets de nodos*, como requerimiento del programa.

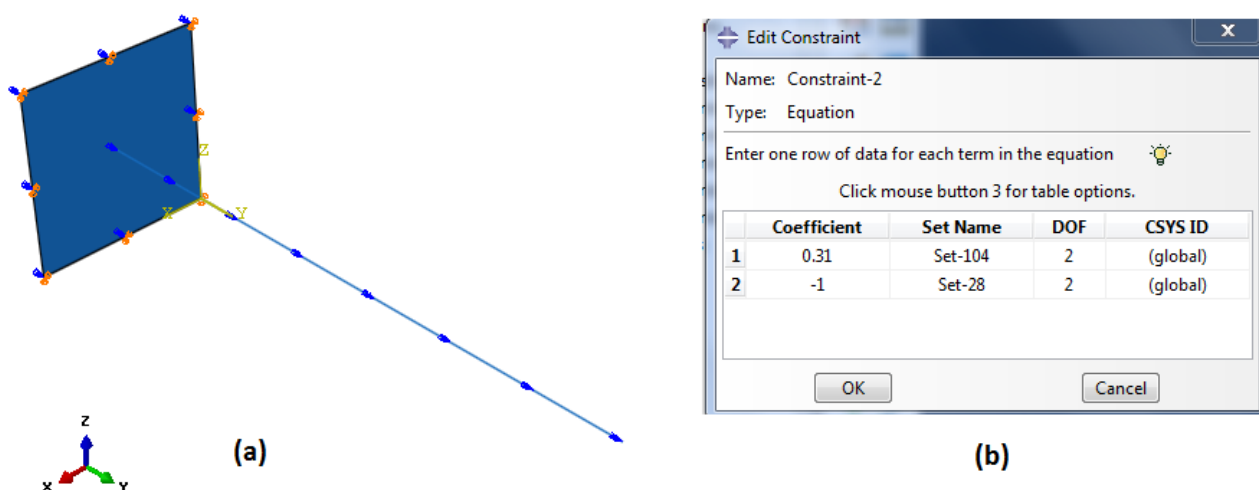


Figura 4. 3. Condiciones de contorno (a) y de ligadura (b) en la celda unitaria en ABAQUS.

Una vez que se han establecido todos los puntos anteriores, hay que elegir el tipo de análisis que se quiere realizar. En este Trabajo lo que se busca es obtener las diferentes frecuencias naturales que presenta el cristal sónico por lo que, usando el código comercial ABAQUS, se selecciona un análisis de frecuencias (*step>linear perturbation>frequency*). Este tipo de análisis resuelve el problema de autovalores que plantean las ecuaciones constitutivas de la estructura.

CAPITULO 5: RESULTADOS

En este capítulo se presentan y comentan los resultados obtenidos, mediante el Método de los Elementos Finitos. Primero se exponen los resultados del caso base y después la influencia que tienen los parámetros escogidos en los resultados.

5.1. RESULTADOS PARA EL CASO BASE

Una vez que el análisis computacional ha concluido, se obtiene como resultado los valores de las frecuencias propias del sistema completo que satisfacen las ecuaciones del movimiento planteadas en el apartado 3.1.

Para poder obtener con seguridad una representación del rango de frecuencias prohibidas se han analizado los 5 primeros modos de vibración del cristal, obteniéndose para todos ellos sus curvas de excitación correspondientes. Los valores de las frecuencias naturales, para los primeros 5 modos de vibración y diferentes valores del vector de Bloch, obtenidos quedan recogidos en la tabla 5.1.

VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	75.86	76.48	1428.30	1428.60
4.19	0.00	OA	15.26	76.26	79.75	1428.30	1428.60
8.38	0.00	OA	55.48	76.36	210.05	1428.40	1428.80
12.57	0.00	OA	68.62	76.49	944.62	1418.60	1428.60
16.76	0.00	OA	70.30	76.46	807.62	1422.60	1428.60
20.94	0.00	A	70.37	76.46	799.93	1422.80	1428.60
20.94	4.19	AB	70.41	76.44	802.15	1422.80	1428.60
20.94	8.38	AB	71.55	76.05	874.38	1424.00	1428.80
20.94	12.57	AB	73.91	74.76	1188.20	1427.10	1427.80
20.94	16.76	AB	73.62	74.65	1138.30	1426.80	1427.40
20.94	20.94	B	73.60	74.65	1135.30	1426.80	1427.40
16.76	16.76	BO	73.63	74.66	1141.50	1426.80	1427.40
12.57	12.57	BO	73.96	75.16	1248.00	1427.70	1427.70
8.38	8.38	BO	62.89	76.82	325.92	1428.70	1428.80
4.19	4.19	BO	16.30	76.47	82.67	1428.30	1428.60
0.00	0.00	O	0.00	75.86	76.48	1428.30	1428.60

Tabla 5. 1. Frecuencias naturales de la celda unitaria en función del vector de onda.

Agrupando todos los barridos lineales que se han realizado en una gráfica, se pueden representar las curvas de excitación del sistema para estos 5 primeros modos de vibración. De esta forma, la existencia de los diversos bandgap existentes en la estructura se muestra en la figura 5.1.

La figura 5.1 permite observar claramente como es el comportamiento vibratorio del cristal así como la presencia de un rango de frecuencias prohibidas que abarca desde los 1250 Hz hasta los 1400 Hz, aproximadamente.

Así mismo, analizando la gráfica de la figura 5.1, se puede obtener una serie de comentarios considerados de interés para el Trabajo:

Lo primero que destaca es la presencia de otro rango de frecuencias prohibidas desde los 1000 Hz y hasta los 1400 Hz. Sin embargo, este bandgap sólo tendría efectos en aquellas ondas cuya dirección de incidencia sea paralela a la dirección OA, es decir, ondas que inciden paralelamente al eje X del cristal. Se trata de un bandgap parcial.

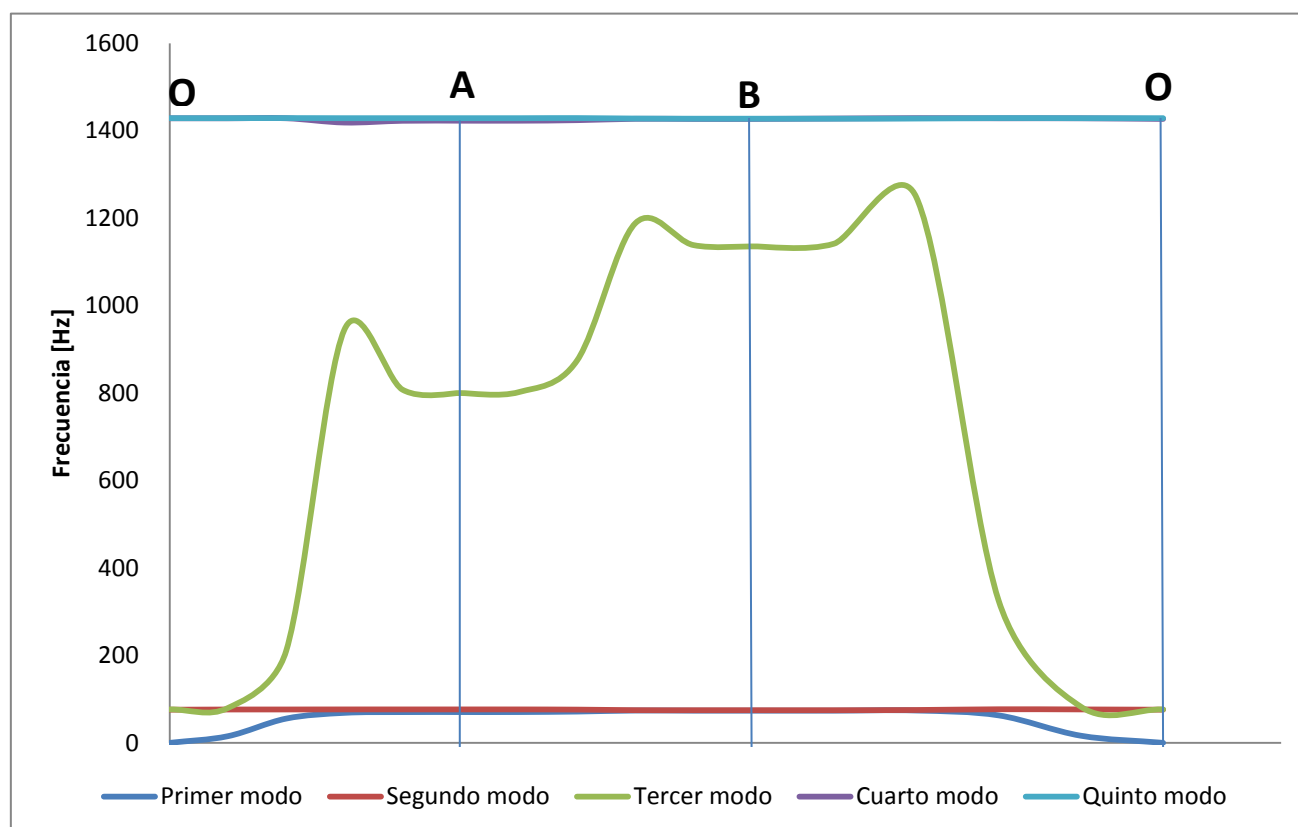


Figura 5. 1. Curvas de excitación para el caso base.

Como ya se comentó en el apartado 3.2.2, para el caso en el que el vector de onda es nulo, $\vec{k} = (k_1, k_3) = (0,0)$, implica que la longitud de onda incidente es infinita, lo que produce un movimiento de traslación puro en el sistema. Esto desemboca en que la primera frecuencia natural de vibración sea nula.

Finalmente, se puede ver claramente como el cuarto y el quinto modo de vibración presentan valores casi idénticos y además estos valores apenas varían su valor. La explicación de que los valores sean prácticamente invariables, sin influencia de la dirección en la que incide la onda, se debe a que en estos modos vibratorios la placa permanece prácticamente inmóvil en comparación con la barra. Este predominio de movimiento de la barra es el causante de que la frecuencia natural del sistema se presente invariable y su correspondiente curva de excitación sea una recta horizontal.

Por otro lado, que dos modos de vibración sean casi idénticos se explica atendiendo a la misma razón que la expuesta anteriormente: en estos modos, cuarto y quinto, el movimiento de la barra predomina en el sistema haciendo que éste se comporte como lo haría una barra sin tener en cuenta la placa. Como se explicó en el apartado 2.2.1, los modos de vibración debidos a los esfuerzos flectores en vigas doblemente simétricas se repiten por parejas puesto que las barras pueden vibrar en 2 planos diferentes, siendo estos perpendiculares entre sí.

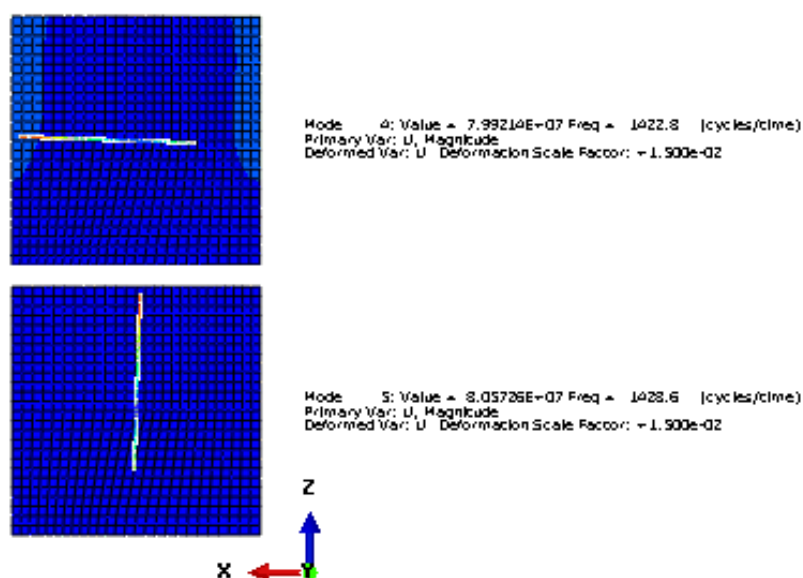


Figura 5. 2. Cuarto y quinto modo de vibración del modelo base.

La figura 5.2 muestra como los planos de vibración de los modos cuarto y quinto, respectivamente, vibran en planos perpendiculares entre sí: esto aclara el hecho de que las curvas de excitación de estos modos sean prácticamente idénticas.

En resumen, el rango de frecuencias prohibidas (bandgap total) que presenta la configuración básica del cristal sónico estudiado, abarca desde los 1250 Hz hasta los 1400 Hz, tal y como se representa en la figura 5.3.

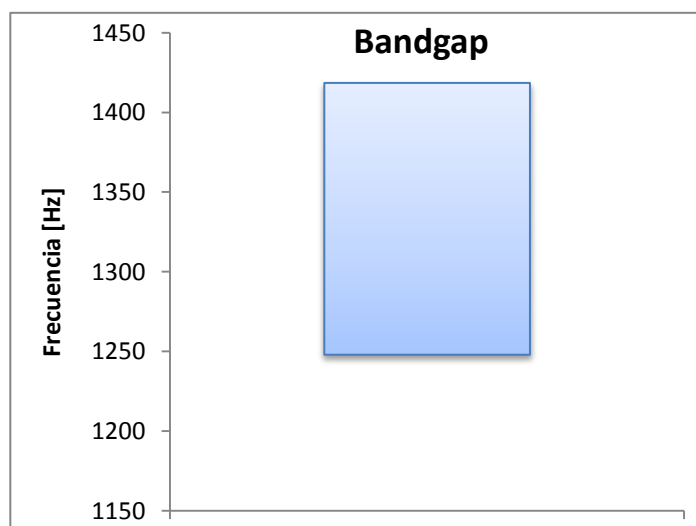


Figura 5. 3. Representación del bandgap en el caso base.

Esto quiere decir que, sin importar la dirección de incidencia, cualquier onda cuya frecuencia de vibración se encuentre dentro de este rango no podrá propagarse y será absorbida por la estructura.

Como demostración, se ha simulado el caso completo, formado por la placa y una matriz de 11x11 vigas (ver apartado 3.1), para comprobar el efecto del bandgap encontrado. Para llevar a cabo el análisis se ha inducido un desplazamiento, periódico y vertical, en la parte central de la placa, lo cual produce un movimiento vibratorio que se propaga por toda la estructura. El desplazamiento inducido sigue la fórmula:

$$u_y = A \cos(\omega t)$$

Donde,

- A, se refiere a la amplitud de la onda vibratoria generada, medida en m. En este caso se ha fijado su valor en 0.4 mm ($4e-4$ m).

- ω refiere a la velocidad angular que se quiere imponer en la onda, expresada en rad/s.

Así mismo, se ha eliminado toda condición de contorno existente en los bordes de la placa dejándola vibrar libremente. De esta forma se evitan posibles interferencias que atenuarían el efecto de la onda por los efectos de borde generados por las condiciones de contorno. El resto de condiciones de la placa se han mantenido como en el modelo base, detallado en el apartado 3.1.

Primeramente se ha generado una onda con una frecuencia de 650 Hz (velocidad angular $\omega = 4080 \text{ rad/s}$). Esta onda no entra dentro del rango de frecuencias prohibidas que presenta el cristal sónico, por lo que el comportamiento esperado es que la onda se propague sin imposición alguna y provoque la vibración no atenuada de todo el sistema. También se generó otra onda cuya frecuencia de vibración estuviera incluida dentro del bandgap del cristal. De esta forma se impuso una onda con una frecuencia de 1300 Hz (velocidad angular $\omega = 8160 \text{ rad/s}$).

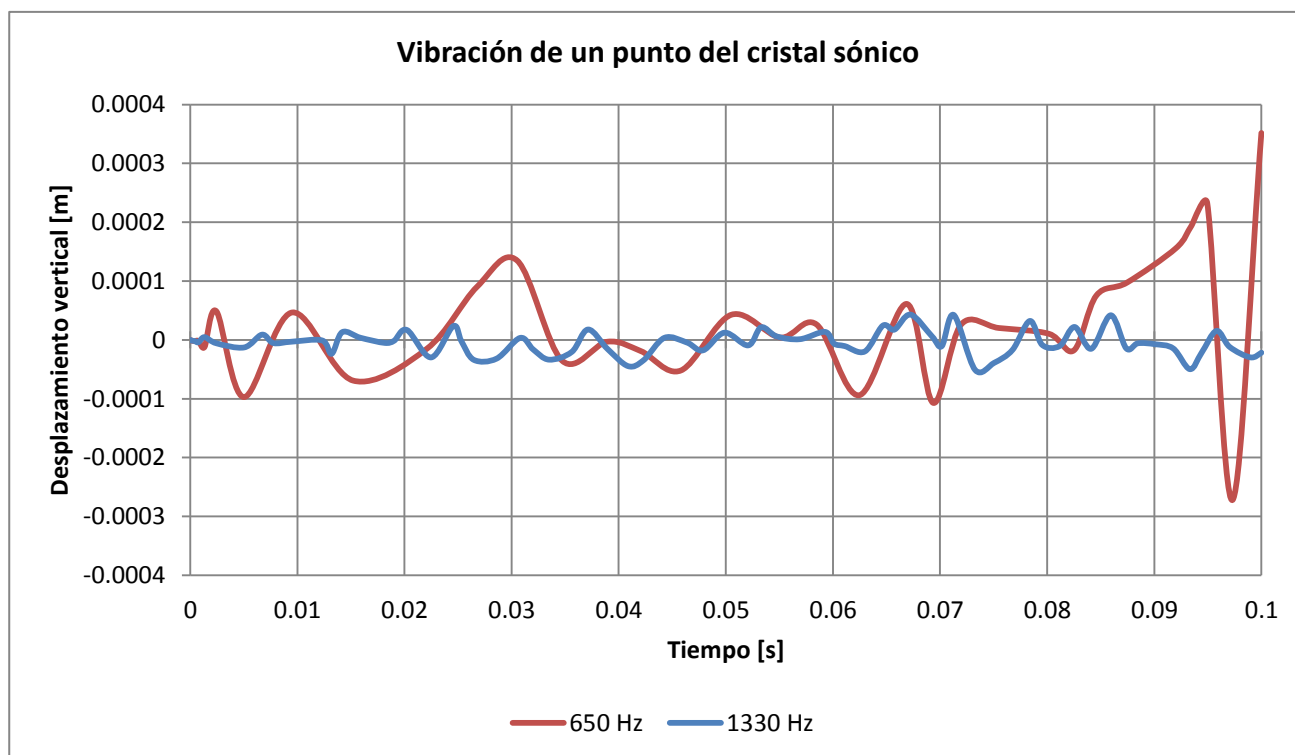


Figura 5. 4. Desplazamiento vertical de un punto del cristal sónico en función del tiempo y del tipo de onda.

En la gráfica de la figura 5.4 se muestra un comparativo con los desplazamientos verticales producidos por cada una de las ondas. En rojo se presentan los desplazamientos verticales del punto para la onda de frecuencia 650 Hz (fuera del bandgap) y en azul los desplazamientos producidos por una onda de 1330 Hz (dentro del bandgap). En el primero de los casos se puede observar cómo se cumple la presunción de que, a medida que el tiempo aumenta, los puntos periféricos del cristal comienzan a vibrar sin atenuación por el efecto de la onda. Sin embargo, en el caso de la onda cuya frecuencia está dentro del bandgap, las vibraciones generadas se propagan de una forma mucho menos visible, poniendo de manifiesto la capacidad que tiene el sistema para absorber las vibraciones generadas dentro del rango de frecuencias prohibidas, atenuando el efecto de éstas en un espacio reducido.

Por último, para mostrar la atenuación que sufre la onda a lo largo del cristal, se han tomado 3 puntos de referencia del cristal situados en una de sus diagonales y se han monitorizado sus desplazamientos verticales en los casos de tener la placa excitada con una frecuencia cuyo valor esté tanto dentro como fuera del bandgap (1330 Hz y 650 Hz, respectivamente). Los resultados de éstos análisis se muestran en las gráficas de la figura 5.5, figura 5.6 y figura 5.7.

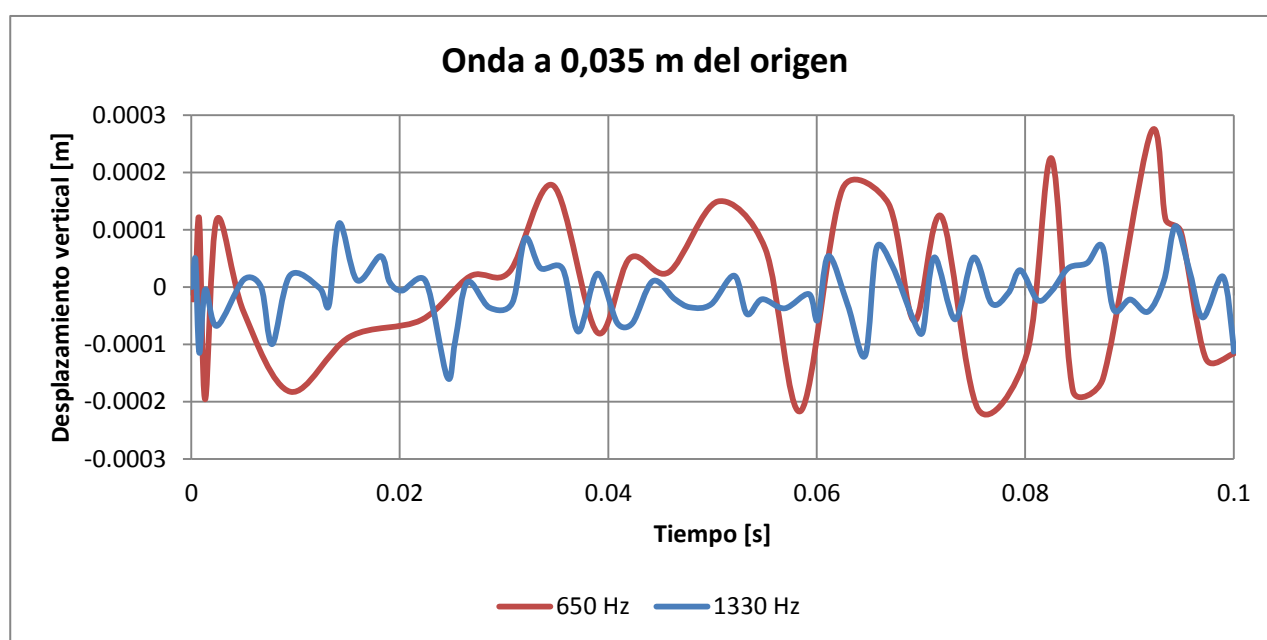


Figura 5. 5. Desplazamiento vertical de un punto situado a 0.035m del origen de la vibración, en función del tiempo y del tipo de onda.

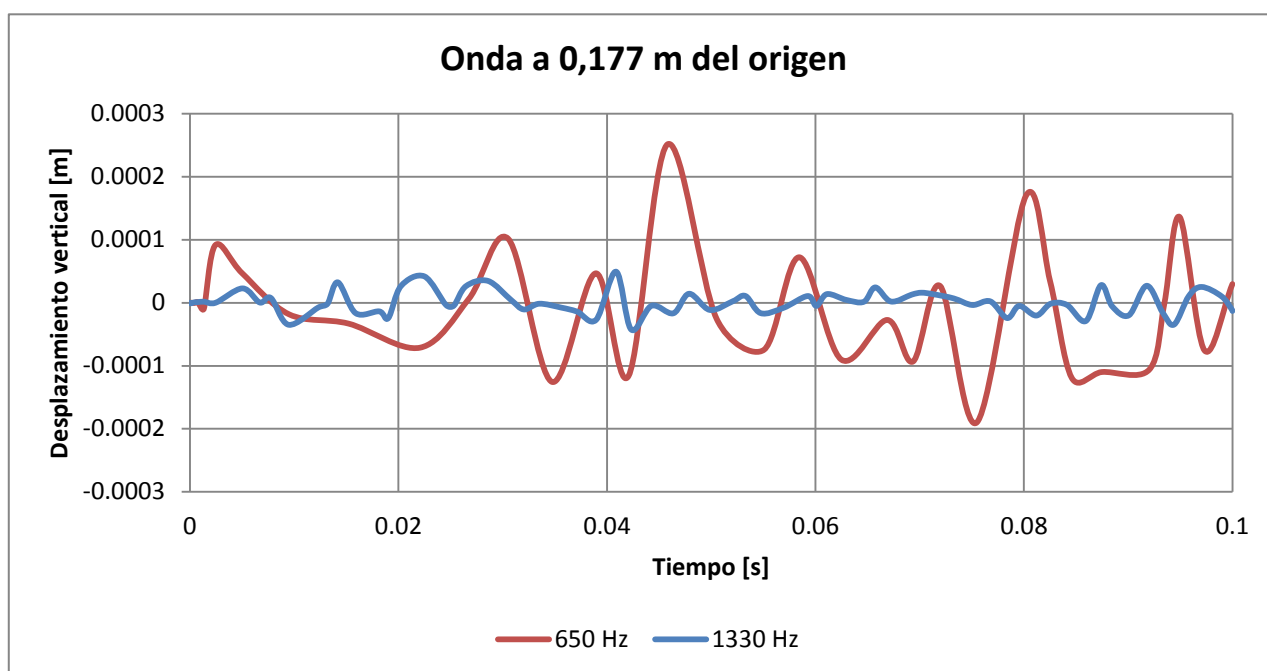


Figura 5. 6. Desplazamiento vertical de un punto situado a 0.177m del origen de la vibración, en función del tiempo y del tipo de onda.

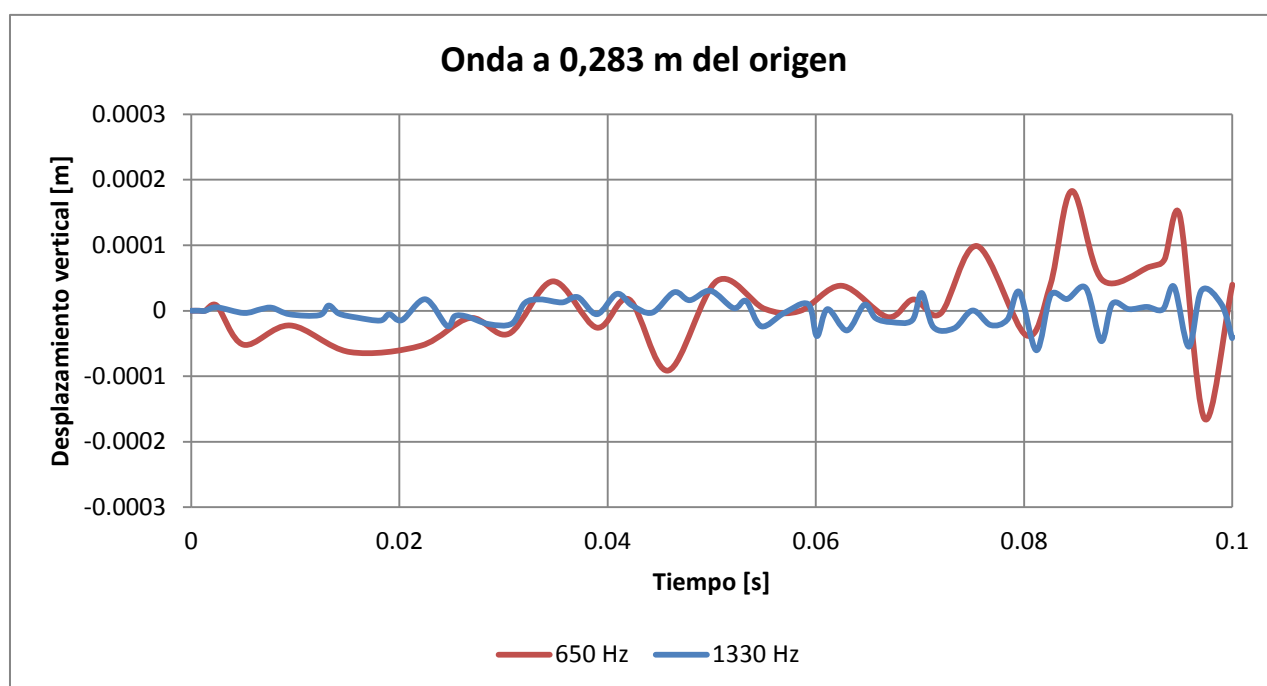


Figura 5. 7. Desplazamiento vertical de un punto situado a 0.283m del origen de la vibración, en función del tiempo y del tipo de onda.

5.2. INFLUENCIA DEL RADIO

El primer parámetro que se ha estudiado para ver cómo afecta en la aparición de bandgaps es el radio de las barras que forman el cristal sónico. Para llevar a cabo este estudio paramétrico se escogieron 4 casos que tuvieran barras del mismo material, es decir, mantuvieran la densidad de la barra igual pero con barras de distintos radios. En concreto se han comparado los resultados obtenidos para los casos M, A, E y para el caso I.

Tal y como recoge la tabla 5.2, la densidad en todos los casos es de 2700Kg/m^3 , mientras que los radios varían desde los 0.0025m del “caso M” hasta los 0.015m del “caso I”.

CASO	M	A	E	I
DENSIDAD [Kg/m ³]	2700	2700	2700	2700
RADIO [m]	0.0025	0.005	0.010	0.015

Tabla 5. 2. Casos dentro del análisis paramétrico del radio de la barra.

En la tabla 5.3 se muestran los rangos de frecuencias que cada modelo es capaz de absorber, mostrando el valor medio del rango con sus correspondientes amplitudes.

CASO	M	A	E	I
RADIO [m]	0.0025	0.005	0.010	0.015
BANDGAP [Hz]	809 ± 0.79	1333 ± 85	1198 ± 555.8	1091 ± 660.5

Tabla 5. 3. Valores del bandgap obtenidos en el análisis paramétrico del radio de la barra.

Se puede ver claramente cómo a medida que aumenta el radio de las barras, el bandgap también aumenta. Al aumentar el tamaño del bandgap lo que se consigue es aumentar el rango de frecuencias que el cristal es capaz de tratar, dotando al sistema

de un amplio margen de trabajo para la absorción de ondas. Si bien parece que al aumentar el radio no haya una gran variación en el límite superior del rango de frecuencias prohibidas, quedando acotado en torno a los 1600 Hz, inferiormente si presenta una notable variación del espectro de ondas que es capaz de tratar.

Este comportamiento queda recogido en la figura 5.8, donde se muestra de una forma más visual e intuitiva la presencia de los rangos de frecuencias prohibidas en función del radio de las barras.

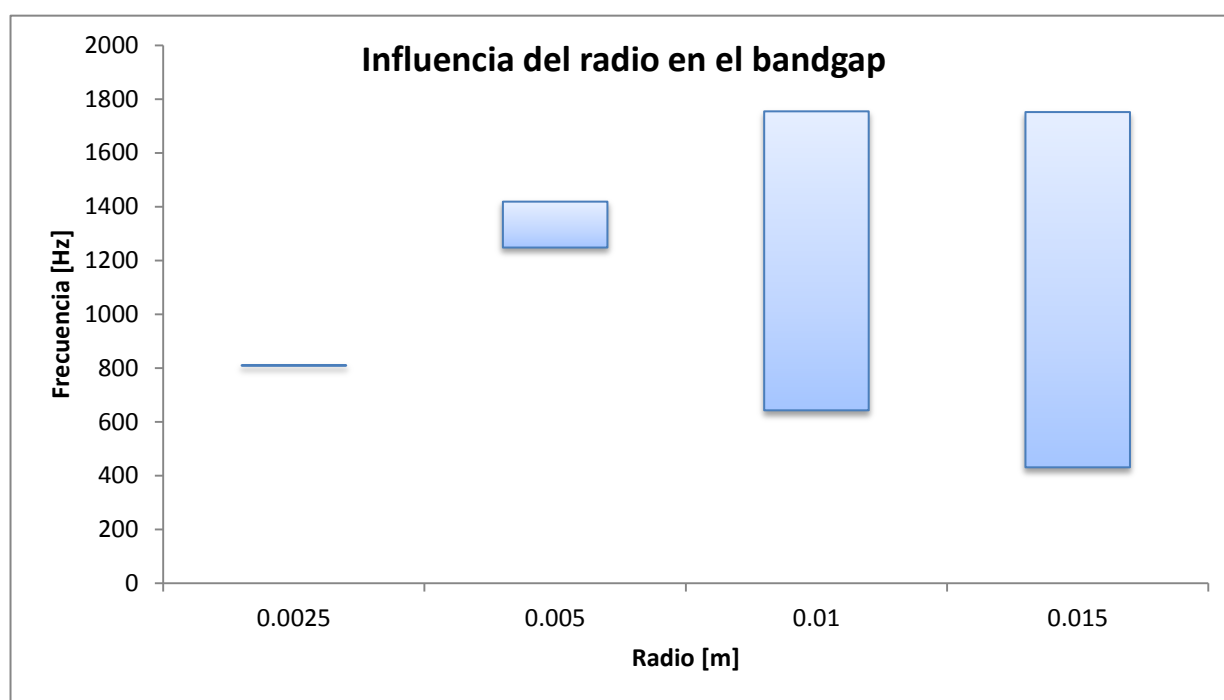


Figura 5. 8. Rango y amplitud del bandgap en función del radio de la barra.

Atendiendo a estos resultados, si tuviéramos que decidir que configuración del cristal se adapta más a un diseño enfocado en tratar un espectro de frecuencias inestable, es decir, un espectro de frecuencias que incluye ondas con diferentes longitudes de ondas y distintas entre sí, optaríamos por barras de mayor diámetro puesto que esta configuración presenta un bandgap más amplio y genérico. Pero si el espectro de ondas que se quiere tratar es más concreto y se sabe que las frecuencias incidentes serán más o menos constantes, se debe optar por unas barras cuyo diámetro sea menor.

5.3. INFLUENCIA DE LA DENSIDAD

El segundo estudio paramétrico que se ha llevado a cabo es aquel, que manteniendo un radio constante, se adentra en la influencia que tiene la densidad del material que constituye las barras en la presencia de los bandgaps.

Para llevar a cabo este análisis paramétrico se escogieron los casos D, A, B y C, siendo éstos los que contemplan una barra de radio 0.005 m y densidades que varían desde los 1350 Kg/m³ del “caso D” hasta los 8100 Kg/m³ del “caso C”, tal y como se muestra en la tabla 5.4.

CASO	D	A	B	C
DENSIDAD [Kg/m ³]	1350	2700	5400	8100
RADIO [m]	0.005	0.005	0.005	0.005

Tabla 5. 4. Casos dentro del análisis paramétrico de la densidad de la barra.

Los resultados obtenidos en este análisis quedan recogidos en la tabla 5.5, mostrándose el valor medio del rango de frecuencias prohibido junto a la amplitud correspondiente.

CASO	D	A	B	C
DENSIDAD [Kg/m ³]	1350	2700	5400	8100
BANDGAP [Hz]	1746 ± 46.8	1333 ± 85	953 ± 53.5	780 ± 41.5

Tabla 5. 5. Valores del bandgap obtenidos en el análisis paramétrico de la densidad de la barra.

Se puede observar cómo al aumentar la densidad del material de las barras, el bandgap presente en el cristal disminuye su tamaño. Esta disminución se muestra de manera clara en la disminución del valor medio del rango de frecuencias prohibidas, es decir, a medida que las barras están constituidas por materiales más densos se pueden tratar frecuencias de menor orden de magnitud.

La evolución del bandgap, atendiendo únicamente a la variación de la densidad, se muestra en la figura 5.9.

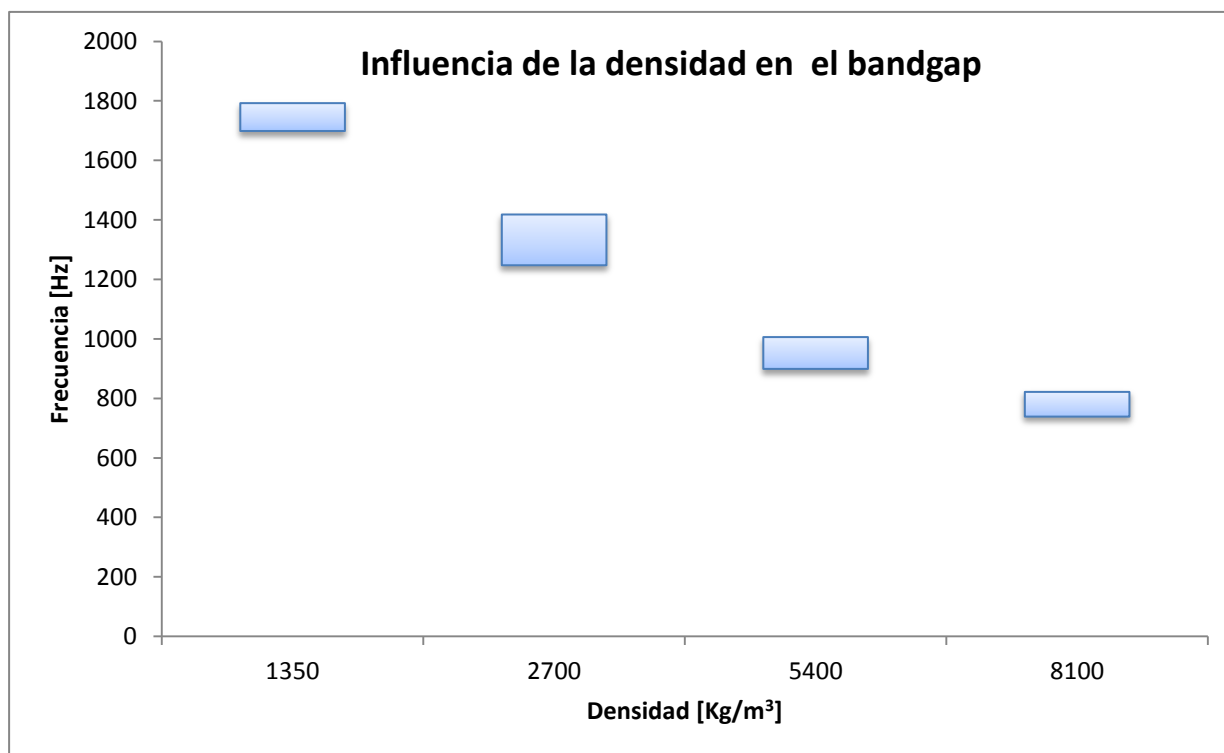


Figura 5. 9. Rango y amplitud del bandgap en función de la densidad de la barra.

CAPITULO 6: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El objeto de este capítulo es resaltar, en primer lugar, las conclusiones obtenidas mediante el estudio que presenta un cristal sónico ante diferentes condiciones de vibración, modelado mediante el código comercial de elementos finitos ABQUS/CAE. Seguidamente, se exponen algunos trabajos futuros que pudieran resultar de interés para ahondar más en las posibles aplicaciones de estas estructuras.

6.1. CONCLUSIONES

A lo largo de este Trabajo Final de Grado se han analizado diferentes configuraciones de un cristal sónico con el fin de conocer en detalle el futuro comportamiento del sistema ante diversas situaciones externas de vibración, permitiendo una anticipación y diseño previo del sistema adaptándolo a las necesidades requeridas.

Aunque algunas conclusiones se han ido comentando durante la exposición de los análisis, en este capítulo se pretende reunir y resumir todas ellas, agilizando y facilitando la comprensión del Trabajo. Por lo tanto, las conclusiones principales a las que se ha llegado son las siguientes:

- i. **Bandgaps**: Se ha demostrado la capacidad que tiene la estructura para generar rangos de frecuencias prohibidas, es decir, rangos de frecuencias de ondas que son incapaces de propagarse a través de la estructura. Dentro de estos rangos se encontraron dos tipos diferentes: los bandgaps parciales y los bandgaps totales. La diferencia entre estos dos reside en la capacidad de absorción de ondas que inciden con una dirección concreta o sin importar dicha dirección.
- ii. **Influencia del radio**: El radio de las barras que forman la estructura es un parámetro con una gran influencia en la generación de los bandgaps. Así, duplicando el radio de las barras se obtiene un rango de frecuencias

prohibidas 6 veces mayor, ampliando el espectro de frecuencias que se pueden absorber. Con lo que, si se tiene un entorno vibratorio con ondas variables, se puede aumentar este parámetro para asegurar un correcto tratamiento de todas las ondas, convirtiéndolo en un cristal sónico para tratamiento de ondas genéricas.

- iii. **Influencia de la densidad:** La densidad del material que constituye las barras provoca otro tipo de cambios en los bandgaps: a medida que aumentamos la densidad, el valor medio del rango de frecuencias prohibidas disminuye, pero manteniendo una amplitud casi constante. Este hecho puede ser empleado en entornos donde las ondas no varíen demasiado su frecuencia, especializando el cristal en tratamiento de ondas más específicas.

6.2. TRABAJOS FUTUROS

Este Trabajo Final de Grado se ha centrado en la existencia e importancia de los bandgaps totales que presenta el cristal sónico. Sin embargo hay otro tipo de rangos de frecuencias prohibidas, los llamados bandgap parciales, que impiden la propagación de las ondas en determinadas direcciones. Sería interesante estudiar este comportamiento a fin de crear un camino por el que guiar las ondas sin que fueran absorbidas por la estructura, es decir, utilizar las propiedades de los cristales sónicos enfocándolas hacia filtros direccionales de ondas.

Por otro lado, todos los análisis presentes en este Trabajo se han realizado para barras de sección constante, circular y maciza. Podría resultar de interés analizar cómo se comportaría el sistema si las barras estuvieran constituidas por secciones con relaciones de área y/o inercia diferentes. Así mismo, el análisis paramétrico realizado se ha centrado en 2 de los parámetros del sistema, quedando otros muchos aún por analizar cómo podrían ser las dimensiones o propiedades de la placa.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. T. C. Nguyen, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 47, 1486 (1999)
- [2] C. T. C. Nguyen, L. P. B. Katehi, and G. M. Rebitz, Proc. IEEE 86, 1756 (1998)
- [3] X. M. H. Huang, C. Zorman, M. Mehregany, and M. L. Roukes, Nature London 421, 496 (2003)
- [4] A. Gaidarzhy, M. Imboden, P. Mohanty, B. Sheldon, and J. Ranken, Appl. Phys. Lett. 91, 203503 (2007)
- [5] F. D. Bannon III, J. R. Clark, and C. T.C. Nguyen, IEEE J. Solid-State Circuits 35, 512526 (2000)
- [6] S. S. Rao, Mechanical Vibrations. Fifth Edition, EE.UU. (2010)
- [7] S. S. Rao, Vibration of Continuous Systems. EE.UU. (2007)
- [8] A. Lonni, Focalización del sonido mediante estructuras periódicas tridimensionales. Universidad Politécnica de Valencia (2011)
- [9] F. Barrera. Introducción a la teoría de grupos. (2003)
- [10] A. V. Maleev. Generation of Molecular Bravais Structures by the Method of Discrete Modeling of Packings. (2000)
- [11] V. A. Eremeyev, E. A. Ivanova, and D. a: Indeitsev. Wave processes in nanostructures formed by nanotube arrays or nanosize crystals. (2010)
- [12] M. H. Huang, S. Mao, H. Feick, et al., "Room-temperature ultraviolet nanowire nanolasers," Science, 292. No. 5523, 1897-1899 (2001)
- [13] K. B. Lee, E. Y. Kim, C. A. Mirkin, and S. M. Wolinsky, "The use of nanoarrays for highly sensitive and selective detection of human immunodeficiency virus type 1 in plasma," Nano Lett., 4, No. 10, 1869-1872 (2004)

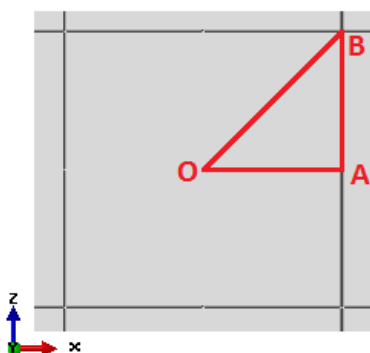
- [14] G. K. Mor, O. K. Varghese, M. Paulose, et al., “A review on highly ordered, vertically oriented TiO₂ nanotube arrays: Fabrication, material properties, and solar energy applications,” *Solar Energy Mater. Solar Cells*, 90, No. 14, 2011–2075 (2006)
- [15] V. K. Varadan and V. V. Varadan, “Microsensors, microelectromechanical systems (MEMS), and electronics for smart structures and systems,” *Smart Mater. Struct.*, 9, No. 6, 953–972 (2000)
- [16] L. Vayssieres, K. Keis, A. Hagfeldt, and S. E. Lindquist, “Three-dimensional array of highly oriented crystalline ZnO microtubes,” *Chem. Mater.*, 13, No. 12, 4395–4398 (2001)
- [17] M. Lorenz, J. Lenzner, E. M. Kaidashev, et al., “Cathodoluminescence of selected single ZnO nanowires on sapphire,” *Ann. Physik*, 13, Nos. 1/2, 39–42 (2004)
- [18] E. M. Kaidashev, M. Lorenz, H. Wenckstern, et al., “High electron mobility of epitaxial ZnO thin films on c-plane sapphire grown by multi-step pulsed laser deposition,” *Appl. Phys. Lett.*, 82, 3901–3903 (2003)
- [19] M. Lorenz, H. Hochmuth, R. Schmidt-Grund, et al., “Advances of pulsed laser deposition of ZnO thin films,” *Ann. Physik*, Bd 13, Nos. 1/2, 59–61 (2004)
- [20] A. S. Phani, J. Woodhouse, and N. A. Fleck, *Wave propagation in two-dimensional periodic lattices*. (2006)
- [21] P. N. Saavedra. *La medición y análisis de las vibraciones como técnica de inspección de equipos y componentes, aplicaciones, normativa y certificación*. (2011)
- [22] R. H. Marshall, I. A. Sokolov, Y. N. Ning, et al., *Meas. Sci. Technol.* 7, 1683 (1996)
- [23] SIMULIA. *Abaqus/CAE User’s Manual*. 2013.

ANEXO DE RESULTADOS

A continuación se muestran todos los resultados obtenidos, para los 16 casos estudiados en este Trabajo.

En cada una de las hojas venideras se muestra:

- Una tabla inicial con los valores de las frecuencias naturales obtenidas en función del vector de onda, siguiendo las direcciones OA-AB-BO que muestra la imagen siguiente:



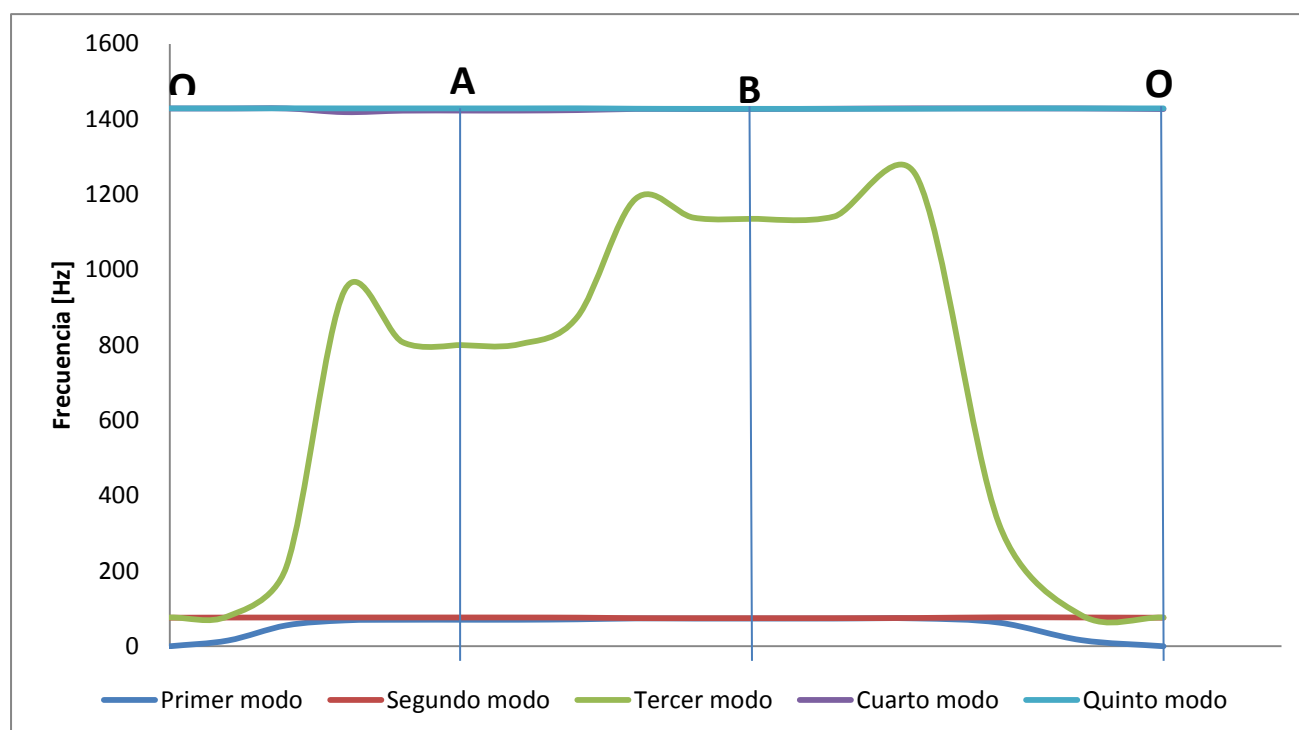
- Una gráfica mostrando las curvas de dispersión. En esta gráfica se puede apreciar tanto la localización del bandgap total como de los diversos rangos de frecuencias parcialmente prohibidas.
- Una tabla final con el valor medio de frecuencia en el cuál se encuentra el bandgap así como la amplitud del mismo.

Como recordatorio, se adjunta a continuación una tabla con los valores de los parámetros que se han variado en cada uno de los casos.

CASO	P	M	N	O	D	A	B	C
DENSIDAD [Kg/m ³]	1350	2700	5400	8100	1350	2700	5400	8100
RADIO [m]	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050
CASO	H	E	F	G	L	I	J	K
DENSIDAD [Kg/m ³]	1350	2700	5400	8100	1350	2700	5400	8100
RADIO [m]	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0150	0.0150	0.0150	0.0150

RESULTADOS CASO A

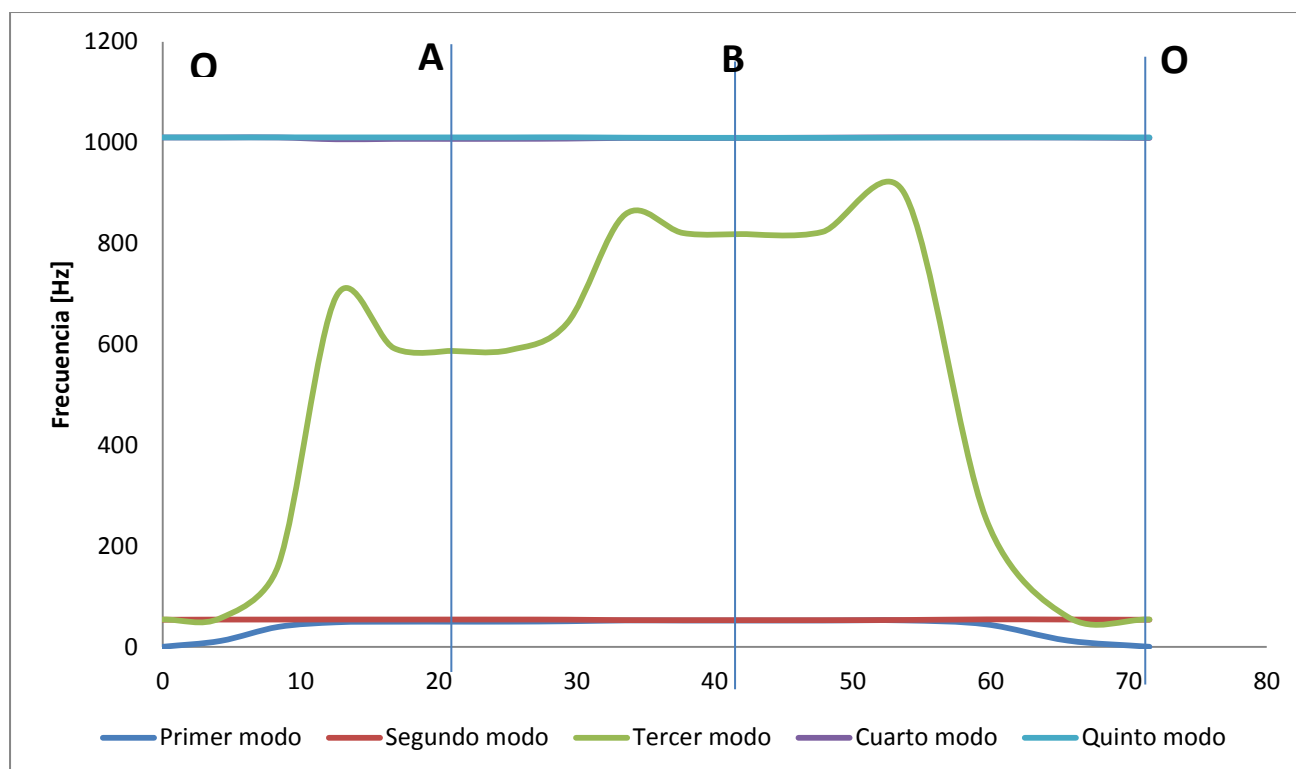
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	75.86	76.48	1428.30	1428.60
4.19	0.00	OA	15.26	76.26	79.75	1428.30	1428.60
8.38	0.00	OA	55.48	76.36	210.05	1428.40	1428.80
12.57	0.00	OA	68.62	76.49	944.62	1418.60	1428.60
16.76	0.00	OA	70.30	76.46	807.62	1422.60	1428.60
20.94	0.00	A	70.37	76.46	799.93	1422.80	1428.60
20.94	4.19	AB	70.41	76.44	802.15	1422.80	1428.60
20.94	8.38	AB	71.55	76.05	874.38	1424.00	1428.80
20.94	12.57	AB	73.91	74.76	1188.20	1427.10	1427.80
20.94	16.76	AB	73.62	74.65	1138.30	1426.80	1427.40
20.94	20.94	B	73.60	74.65	1135.30	1426.80	1427.40
16.76	16.76	BO	73.63	74.66	1141.50	1426.80	1427.40
12.57	12.57	BO	73.96	75.16	1248.00	1427.70	1427.70
8.38	8.38	BO	62.89	76.82	325.92	1428.70	1428.80
4.19	4.19	BO	16.30	76.47	82.67	1428.30	1428.60
0.00	0.00	O	0.00	75.86	76.48	1428.30	1428.60



RESULTADOS CASO A	
Bandgap [Hz]	1333.3 ± 85.3

RESULTADOS CASO B

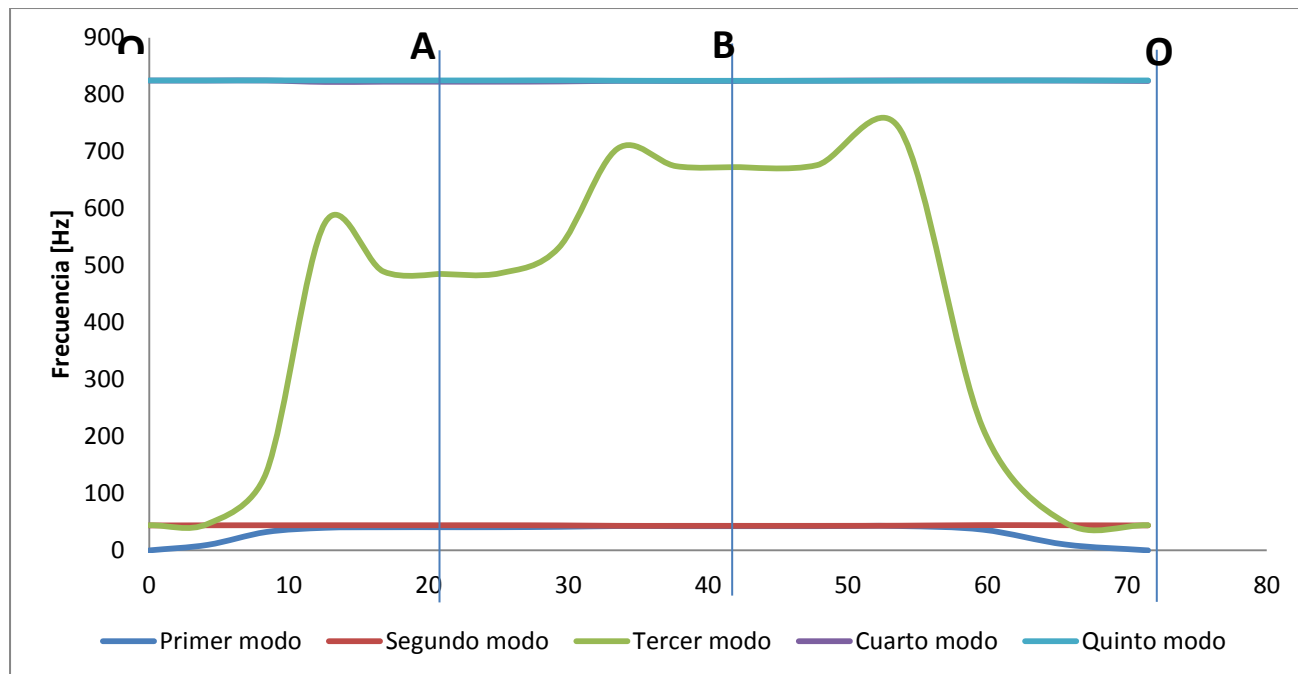
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0	0	O	0.00	53.64	54.08	1010.00	1010.20
4.19	0	OA	11.60	53.93	56.85	1010.00	1010.20
8.38	0	OA	39.45	53.99	161.87	1010.10	1010.30
12.57	0	OA	48.53	54.09	694.44	1006.50	1010.20
16.76	0	OA	49.71	54.06	592.18	1007.20	1010.20
20.94	0	A	49.76	54.06	586.70	1007.20	1010.20
20.94	4.19	AB	49.79	54.05	588.37	1007.30	1010.20
20.94	8.38	AB	50.59	53.78	642.26	1007.80	1010.40
20.94	12.57	AB	52.26	52.87	857.40	1009.20	1009.70
20.94	16.76	AB	52.05	52.79	820.62	1009.00	1009.40
20.94	20.94	B	52.04	52.78	818.47	1009.00	1009.40
16.76	16.76	BO	52.07	52.79	822.85	1009.00	1009.40
12.57	12.57	BO	52.30	53.14	899.57	1009.60	1009.70
8.38	8.38	BO	44.55	54.32	254.15	1010.30	1010.40
4.19	4.19	BO	12.33	54.07	59.30	1010.00	1010.20
0	0	O	0.00	53.64	54.08	1010.00	1010.20



RESULTADOS CASO B	
Bandgap [Hz]	953.04 ± 53.47

RESULTADOS CASO C

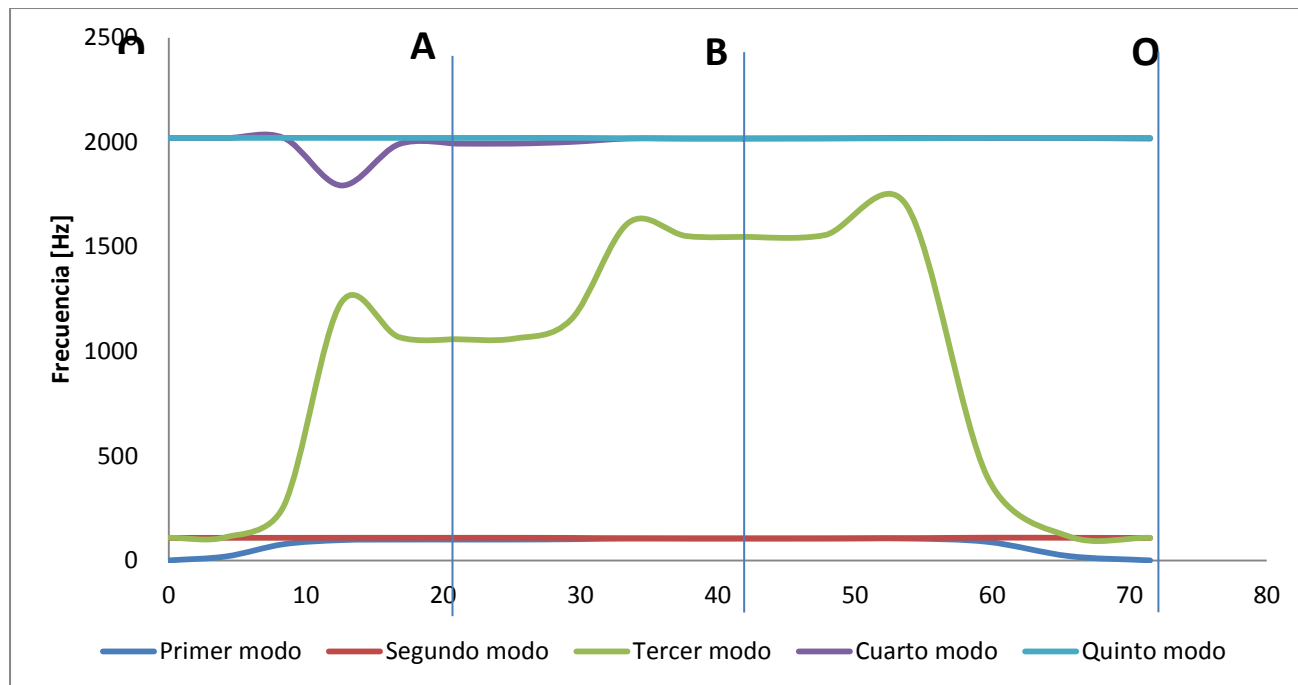
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	43.80	44.16	824.63	824.82
4.19	0.00	OA	9.73	44.03	46.57	824.63	824.83
8.38	0.00	OA	32.27	44.09	136.56	824.73	824.94
12.57	0.00	OA	39.63	44.16	574.36	822.23	824.83
16.76	0.00	OA	40.59	44.14	489.62	822.59	824.82
20.94	0.00	A	40.63	44.14	485.14	822.62	824.82
20.94	4.19	AB	40.66	44.14	486.54	822.64	824.82
20.94	8.38	AB	41.31	43.91	531.33	823.05	824.96
20.94	12.57	AB	42.67	43.17	704.86	824.06	824.44
20.94	16.76	AB	42.50	43.10	674.44	823.88	824.21
20.94	20.94	B	42.49	43.10	672.68	823.87	824.22
16.76	16.76	BO	42.51	43.11	676.26	823.90	824.21
12.57	12.57	BO	42.70	43.39	739.24	824.37	824.46
8.38	8.38	BO	36.39	44.35	215.39	824.88	824.96
4.19	4.19	BO	10.32	44.15	48.70	824.64	824.83
0.00	0.00	O	0.00	43.80	44.16	824.63	824.82



RESULTADOS CASO C	
Bandgap [Hz]	780.74 ± 41.5

RESULTADOS CASO D

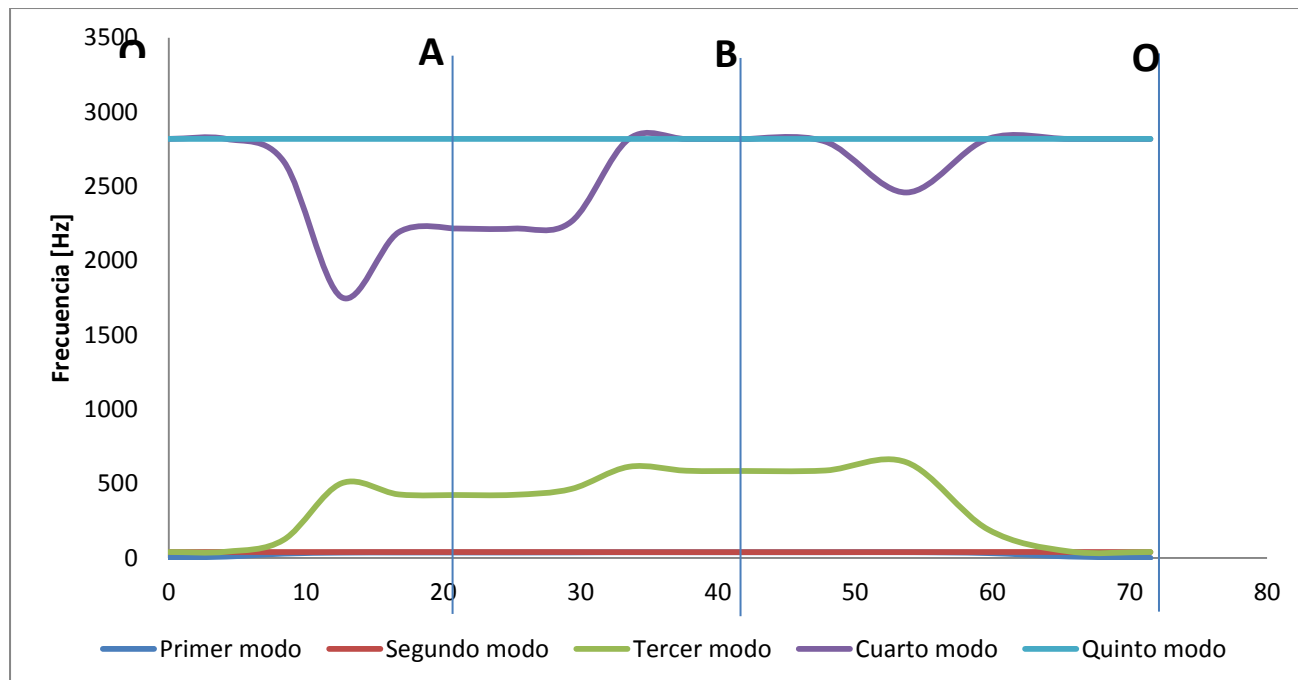
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	107.28	108.16	2019.80	2020.30
4.19	0.00	OA	19.13	107.83	111.59	2019.80	2020.30
8.38	0.00	OA	77.56	107.99	259.97	2020.10	2020.60
12.57	0.00	OA	97.02	108.17	1233.20	1792.90	2020.30
16.76	0.00	OA	99.41	108.13	1068.30	1990.10	2020.30
20.94	0.00	A	99.51	108.12	1057.70	1993.00	2020.30
20.94	4.19	AB	99.57	108.11	1060.40	1993.10	2020.30
20.94	8.38	AB	101.17	107.55	1152.50	2001.20	2020.60
20.94	12.57	AB	104.52	105.73	1615.30	2017.60	2018.80
20.94	16.76	AB	104.10	105.57	1551.30	2017.10	2018.20
20.94	20.94	B	104.08	105.56	1547.10	2017.10	2018.20
16.76	16.76	BO	104.13	105.58	1555.70	2017.20	2018.20
12.57	12.57	BO	104.59	106.29	1699.30	2018.20	2018.60
8.38	8.38	BO	88.64	108.63	395.91	2020.40	2020.60
4.19	4.19	BO	20.61	108.14	114.70	2019.80	2020.30
0.00	0.00	O	0.00	107.28	108.16	2019.80	2020.30



RESULTADOS CASO D	
Bandgap [Hz]	1746.1 ± 46.8

RESULTADOS CASO E

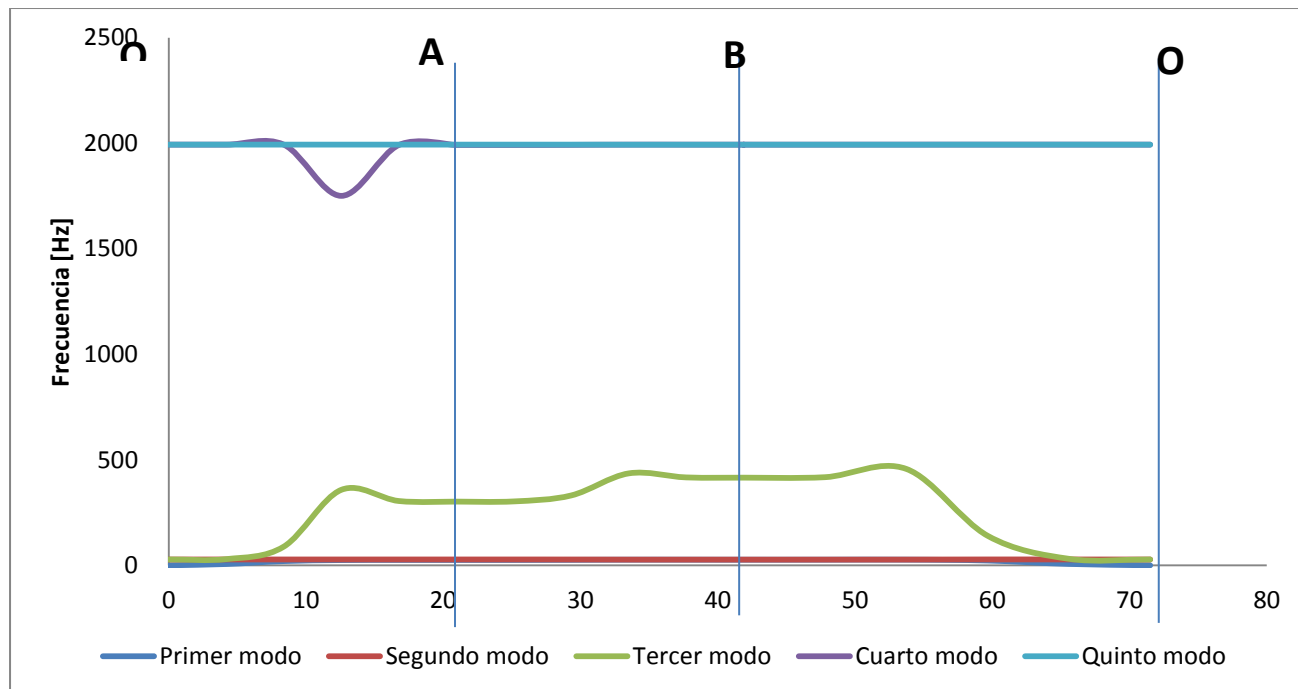
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	38.93	39.27	2818.60	2818.60
4.19	0.00	OA	8.55	39.15	41.48	2818.60	2818.60
8.38	0.00	OA	28.35	39.21	121.93	2666.10	2818.60
12.57	0.00	OA	35.06	39.28	500.98	1754.30	2818.60
16.76	0.00	OA	35.95	39.26	426.74	2191.30	2818.60
20.94	0.00	A	35.99	39.26	422.84	2215.90	2818.60
20.94	4.19	AB	36.01	39.25	424.08	2215.10	2818.60
20.94	8.38	AB	36.61	39.04	463.45	2262.00	2818.60
20.94	12.57	AB	37.88	38.34	612.78	2818.10	2818.20
20.94	16.76	AB	37.72	38.28	586.02	2818.10	2818.30
20.94	20.94	B	37.71	38.28	584.49	2818.10	2818.30
16.76	16.76	BO	37.73	38.29	587.61	2818.10	2818.30
12.57	12.57	BO	37.91	38.55	642.71	2800.90	2818.30
8.38	8.38	BO	32.09	39.45	191.93	2458.10	2818.60
4.19	4.19	BO	9.05	39.26	43.42	2818.60	2818.60
0.00	0.00	O	0.00	38.93	39.27	2818.60	2818.60



RESULTADOS CASO E	
Bandgap [Hz]	1198.51 ± 555.8

RESULTADOS CASO F

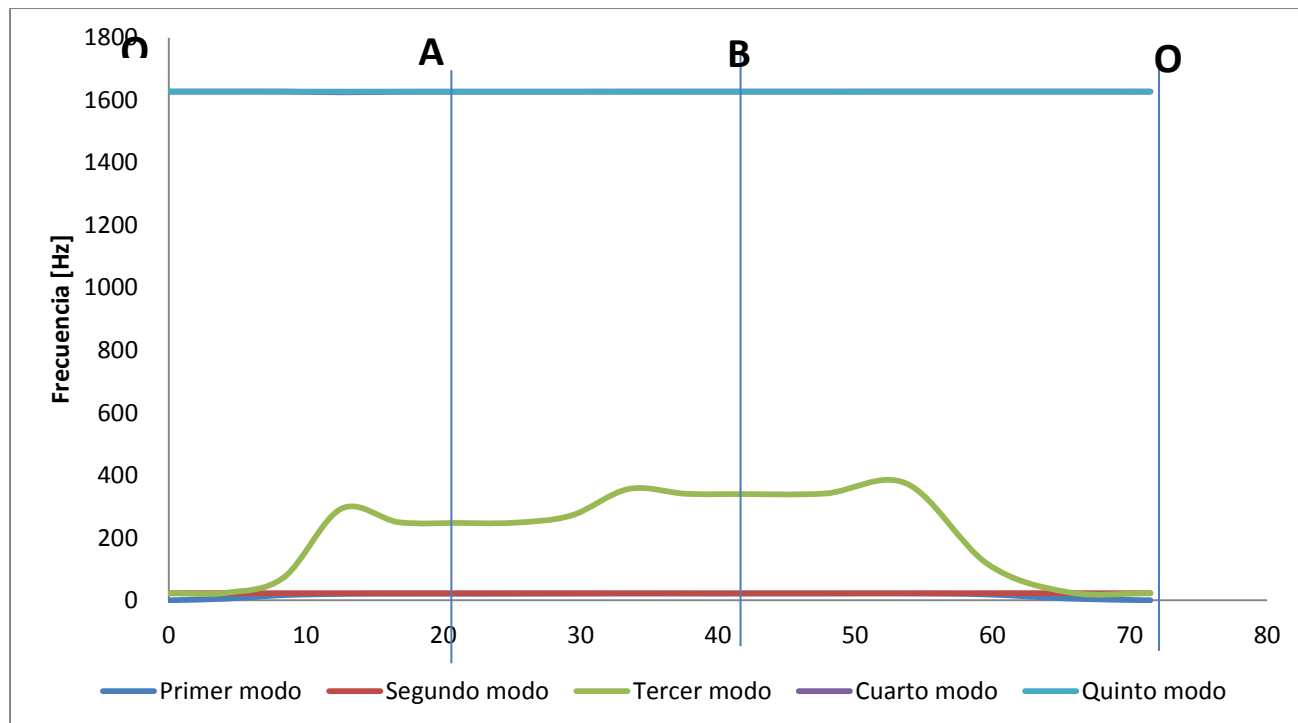
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	27.53	27.77	1993.00	1993.00
4.19	0.00	OA	6.18	27.69	29.42	1993.00	1993.10
8.38	0.00	OA	20.08	27.72	88.59	1993.00	1993.10
12.57	0.00	OA	24.79	27.77	357.65	1750.30	1993.10
16.76	0.00	OA	25.42	27.76	304.68	1991.10	1993.10
20.94	0.00	A	25.45	27.76	301.92	1991.30	1993.10
20.94	4.19	AB	25.46	27.75	302.81	1991.30	1993.10
20.94	8.38	AB	25.89	27.60	331.02	1991.90	1993.10
20.94	12.57	AB	26.79	27.11	435.54	1992.90	1992.90
20.94	16.76	AB	26.67	27.07	416.45	1992.90	1992.90
20.94	20.94	B	26.67	27.07	415.36	1992.80	1992.90
16.76	16.76	BO	26.68	27.07	417.57	1992.90	1992.90
12.57	12.57	BO	26.80	27.26	456.67	1992.80	1992.90
8.38	8.38	BO	22.70	27.90	139.98	1993.00	1993.10
4.19	4.19	BO	6.53	27.76	30.86	1993.00	1993.10
0.00	0.00	O	0.00	27.53	27.77	1993.00	1993.00



RESULTADOS CASO F	
Bandgap [Hz]	1103.49 ± 646.82

RESULTADOS CASO G

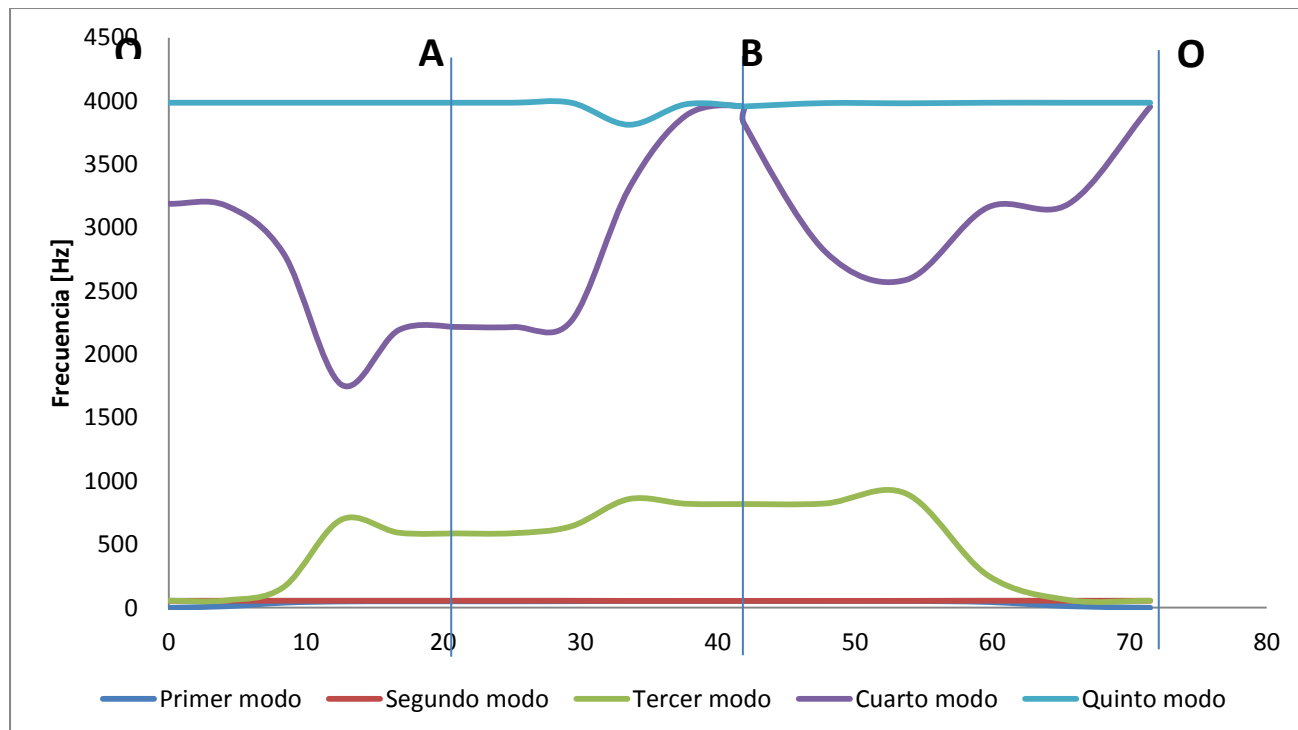
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	22.48	22.67	1627.30	1627.30
4.19	0.00	OA	5.08	22.61	24.04	1627.30	1627.30
8.38	0.00	OA	16.40	22.64	73.02	1627.30	1627.30
12.57	0.00	OA	20.24	22.68	292.95	1625.10	1627.30
16.76	0.00	OA	20.75	22.67	249.58	1626.70	1627.30
20.94	0.00	A	20.78	22.66	247.33	1626.80	1627.30
20.94	4.19	AB	20.79	22.66	248.06	1626.80	1627.30
20.94	8.38	AB	21.14	22.54	271.20	1626.90	1627.30
20.94	12.57	AB	21.87	22.14	356.23	1627.20	1627.20
20.94	16.76	AB	21.78	22.10	340.59	1627.20	1627.20
20.94	20.94	B	21.77	22.10	339.71	1627.20	1627.20
16.76	16.76	BO	21.79	22.10	341.51	1627.20	1627.20
12.57	12.57	BO	21.89	22.26	373.48	1627.20	1627.30
8.38	8.38	BO	18.54	22.78	115.52	1627.30	1627.30
4.19	4.19	BO	5.37	22.67	25.25	1627.30	1627.30
0.00	0.00	O	0.00	22.48	22.67	1627.30	1627.30



RESULTADOS CASO G	
Bandgap [Hz]	999.29 \pm 625.81

RESULTADOS CASO H

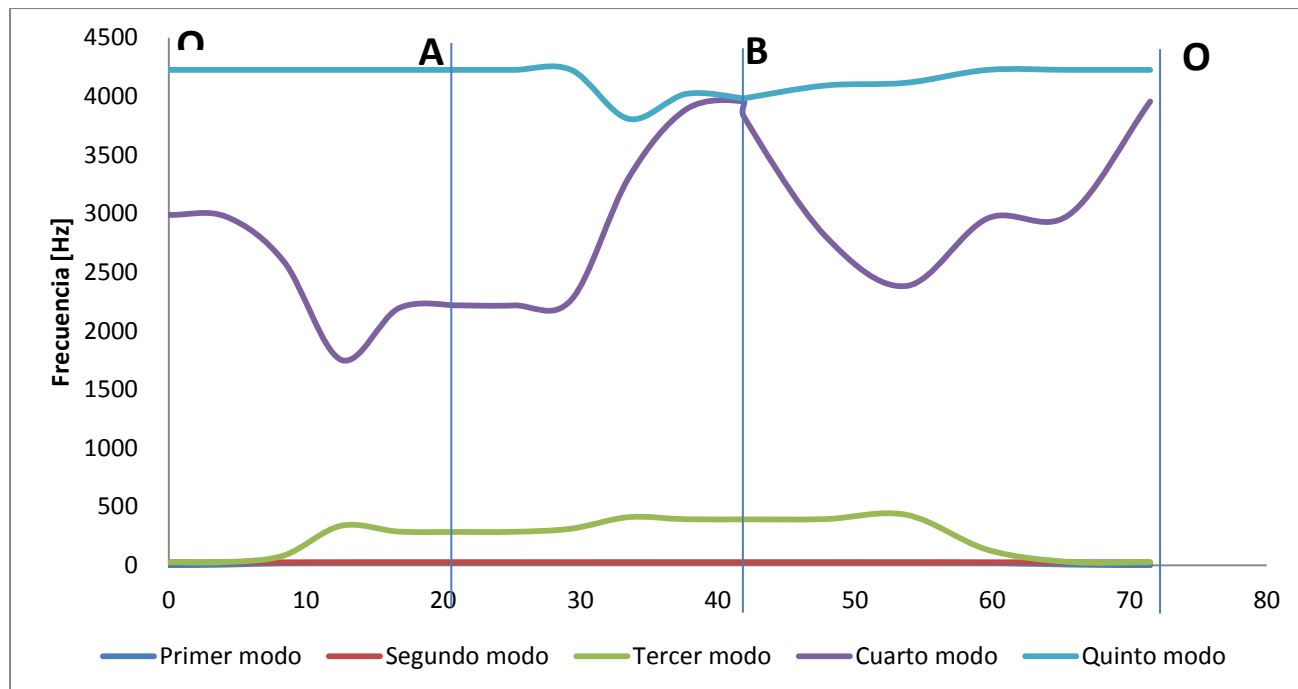
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	55.06	55.54	3188.60	3986.00
4.19	0.00	OA	11.61	55.37	58.36	3173.10	3986.00
8.38	0.00	OA	39.97	55.44	164.05	2793.70	3986.00
12.57	0.00	OA	49.57	55.54	695.03	1761.00	3986.10
16.76	0.00	OA	50.84	55.52	592.18	2191.80	3986.10
20.94	0.00	A	50.89	55.52	586.70	2216.40	3986.10
20.94	4.19	AB	50.92	55.51	588.38	2215.60	3986.10
20.94	8.38	AB	51.78	55.21	642.59	2262.50	3986.00
20.94	12.57	AB	53.57	54.22	857.77	3305.70	3812.10
20.94	16.76	AB	53.35	54.14	820.63	3886.40	3974.80
20.94	20.94	B	53.33	54.13	818.47	3954.70	3956.50
16.76	16.76	BO	53.36	54.14	822.87	3826.90	3983.40
12.57	12.57	BO	53.61	54.52	900.18	2812.30	3981.40
8.38	8.38	BO	45.34	55.79	256.43	2588.40	3986.10
4.19	4.19	BO	12.33	55.53	60.85	3159.10	3986.00
0.00	0.00	O	0.00	55.06	55.54	3188.60	3986.00



RESULTADOS CASO H	
Bandgap [Hz]	1330.59 ± 430.41

RESULTADOS CASO I

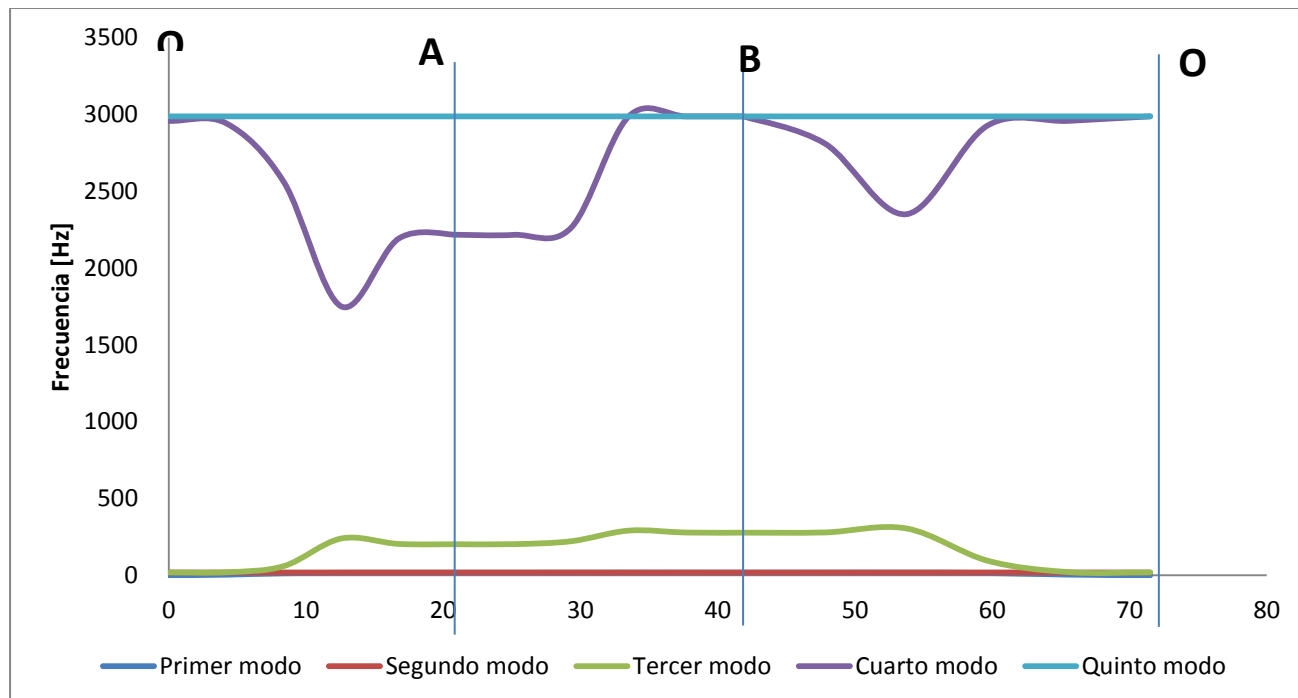
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	25.99	26.22	2988.40	4224.70
4.19	0.00	OA	5.84	26.14	27.78	2972.50	4224.70
8.38	0.00	OA	18.94	26.18	83.85	2591.40	4224.70
12.57	0.00	OA	23.40	26.22	337.56	1751.70	4224.70
16.76	0.00	OA	23.99	26.21	287.56	2192.40	4224.70
20.94	0.00	A	24.02	26.21	284.97	2217.10	4224.70
20.94	4.19	AB	24.04	26.21	285.81	2216.20	4224.70
20.94	8.38	AB	24.44	26.06	312.45	2263.10	4224.70
20.94	12.57	AB	25.29	25.60	410.87	3305.80	3806.60
20.94	16.76	AB	25.18	25.56	392.85	3888.50	4019.80
20.94	20.94	B	25.18	25.56	391.83	3955.20	3981.70
16.76	16.76	BO	25.19	25.56	393.91	3828.70	4091.40
12.57	12.57	BO	25.31	25.74	430.79	2810.50	4115.00
8.38	8.38	BO	21.42	26.34	132.50	2381.90	4224.70
4.19	4.19	BO	6.17	26.21	29.16	2958.30	4224.70
0.00	0.00	O	0.00	25.99	26.22	2988.40	4224.70



RESULTADOS CASO I	
Bandgap [Hz]	1091.25 ± 660.46

RESULTADOS CASO J

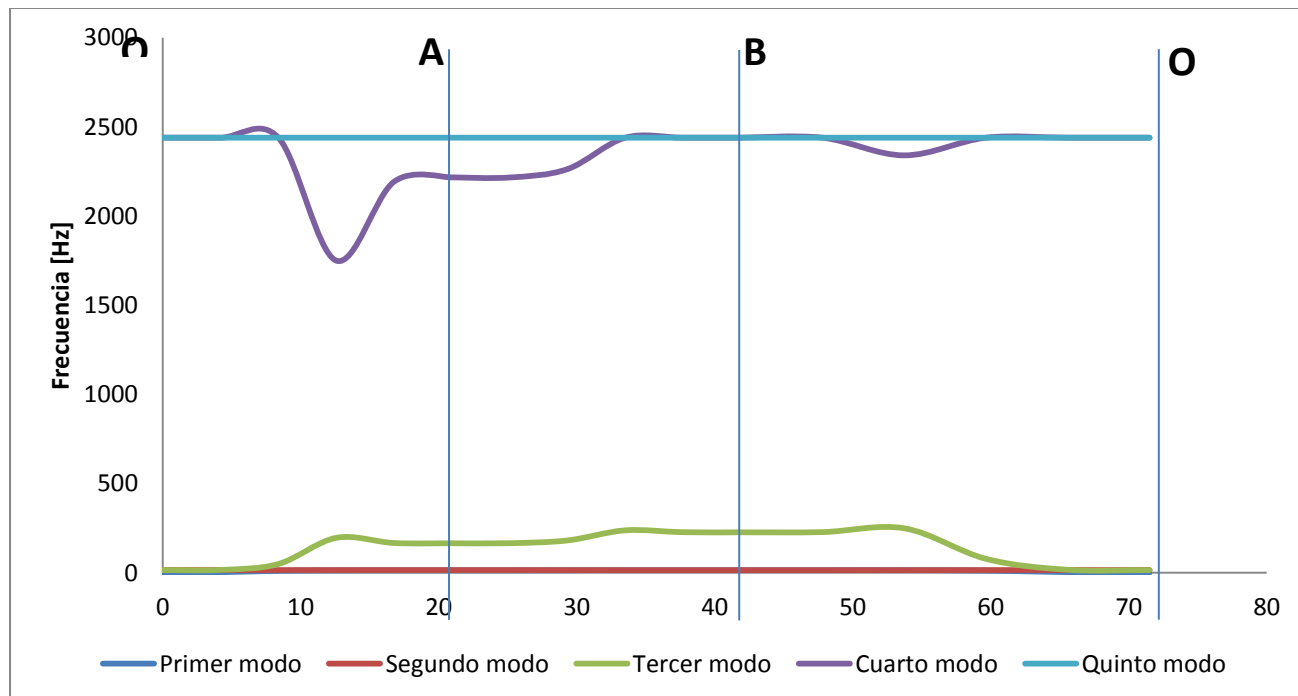
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	18.38	18.54	2958.10	2987.30
4.19	0.00	OA	4.17	18.48	19.67	2942.20	2987.30
8.38	0.00	OA	13.40	18.51	60.04	2560.60	2987.30
12.57	0.00	OA	16.55	18.54	239.71	1750.30	2987.30
16.76	0.00	OA	16.97	18.53	204.22	2192.30	2987.30
20.94	0.00	A	16.99	18.53	202.39	2217.00	2987.30
20.94	4.19	AB	17.00	18.53	202.98	2216.10	2987.30
20.94	8.38	AB	17.28	18.43	221.94	2263.00	2987.30
20.94	12.57	AB	17.88	18.10	291.19	2987.20	2987.20
20.94	16.76	AB	17.81	18.07	278.40	2987.20	2987.20
20.94	20.94	B	17.80	18.07	277.68	2987.20	2987.30
16.76	16.76	BO	17.81	18.07	279.15	2987.20	2987.20
12.57	12.57	BO	17.89	18.20	305.28	2810.10	2987.30
8.38	8.38	BO	15.15	18.63	95.06	2350.60	2987.30
4.19	4.19	BO	4.40	18.54	20.67	2927.90	2987.30
0.00	0.00	O	0.00	18.38	18.54	2958.10	2987.30



RESULTADOS CASO J	
Bandgap [Hz]	1027.79 ± 722.51

RESULTADOS CASO K

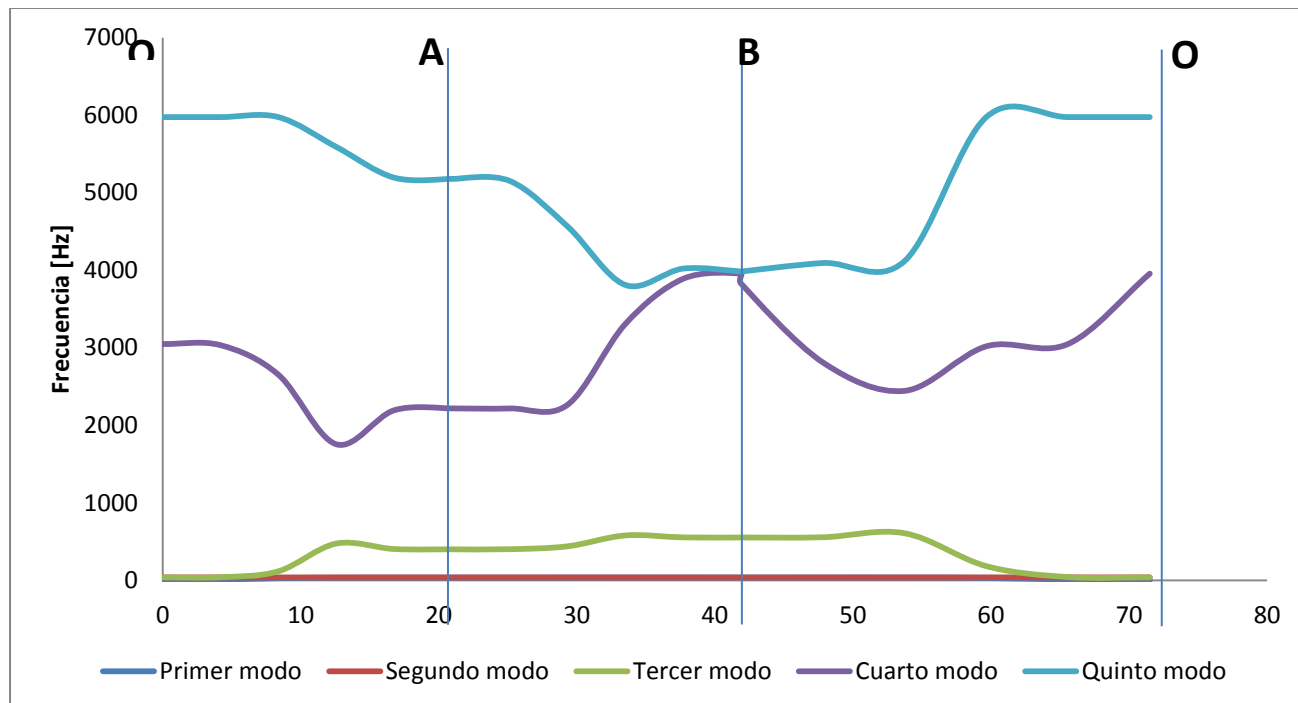
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	15.01	15.14	2439.10	2439.10
4.19	0.00	OA	3.42	15.09	16.07	2439.10	2439.10
8.38	0.00	OA	10.95	15.11	49.24	2439.10	2439.10
12.57	0.00	OA	13.51	15.14	196.00	1749.90	2439.10
16.76	0.00	OA	13.85	15.13	166.99	2192.10	2439.10
20.94	0.00	A	13.87	15.13	165.49	2216.70	2439.10
20.94	4.19	AB	13.88	15.13	165.98	2215.90	2439.10
20.94	8.38	AB	14.11	15.05	181.49	2262.70	2439.10
20.94	12.57	AB	14.60	14.78	237.94	2439.10	2439.10
20.94	16.76	AB	14.54	14.76	227.48	2439.10	2439.10
20.94	20.94	B	14.54	14.75	226.90	2439.10	2439.10
16.76	16.76	BO	14.54	14.76	228.10	2439.10	2439.10
12.57	12.57	BO	14.61	14.86	249.44	2439.00	2439.10
8.38	8.38	BO	12.37	15.21	77.99	2339.90	2439.10
4.19	4.19	BO	3.60	15.14	16.89	2439.10	2439.10
0.00	0.00	O	0.00	15.01	15.14	2439.10	2439.10



RESULTADOS CASO K	
Bandgap [Hz]	999.67 ± 750.23

RESULTADOS CASO L

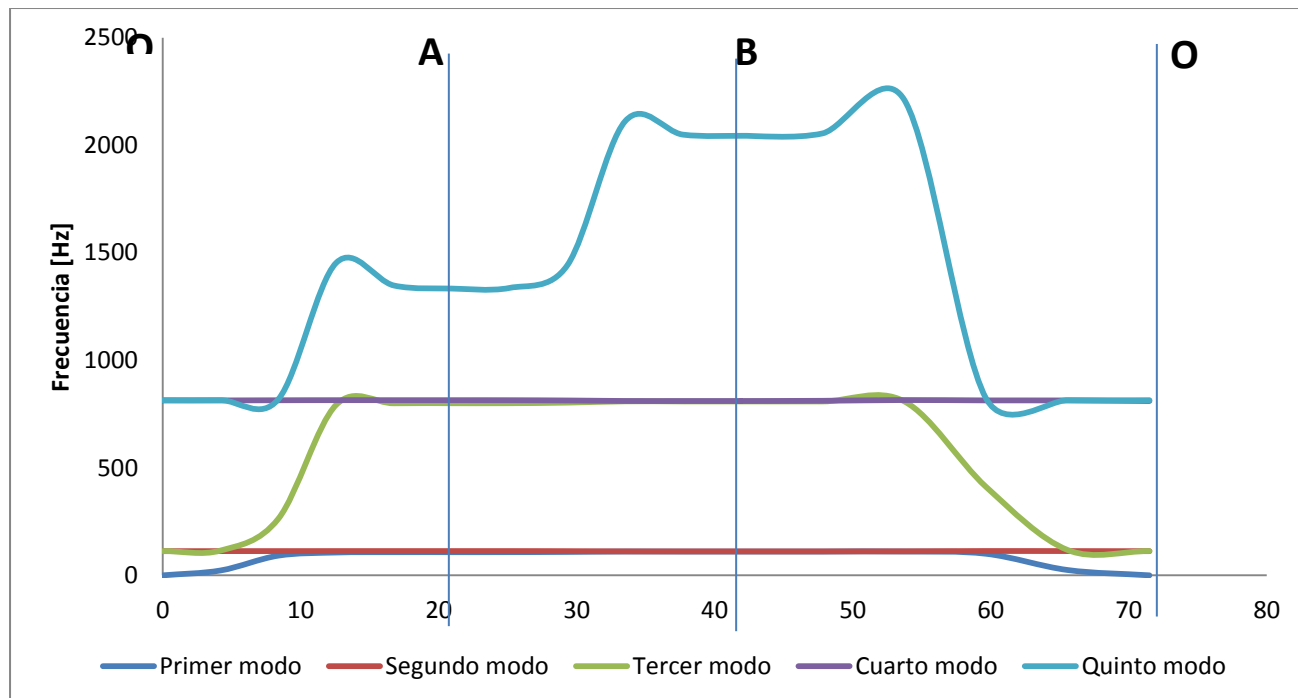
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	36.76	37.08	3047.70	5974.60
4.19	0.00	OA	8.10	36.97	39.19	3031.90	5974.60
8.38	0.00	OA	26.76	37.02	115.72	2651.50	5974.60
12.57	0.00	OA	33.09	37.08	473.34	1754.30	5590.50
16.76	0.00	OA	33.93	37.07	403.19	2192.50	5193.80
20.94	0.00	A	33.97	37.07	399.52	2217.10	5177.60
20.94	4.19	AB	33.99	37.06	400.69	2216.30	5151.60
20.94	8.38	AB	34.56	36.86	437.93	2263.10	4564.50
20.94	12.57	AB	35.77	36.20	578.40	3305.90	3809.40
20.94	16.76	AB	35.61	36.14	553.11	3888.70	4020.50
20.94	20.94	B	35.60	36.14	551.67	3955.40	3982.30
16.76	16.76	BO	35.62	36.15	554.61	3828.90	4092.50
12.57	12.57	BO	35.79	36.40	606.61	2811.10	4116.20
8.38	8.38	BO	30.28	37.25	182.26	2443.20	5974.60
4.19	4.19	BO	8.57	37.07	41.04	3017.80	5974.60
0.00	0.00	O	0.00	36.76	37.08	3047.70	5974.60



RESULTADOS CASO L	
Bandgap [Hz]	1180.46 ± 573.85

RESULTADOS CASO M

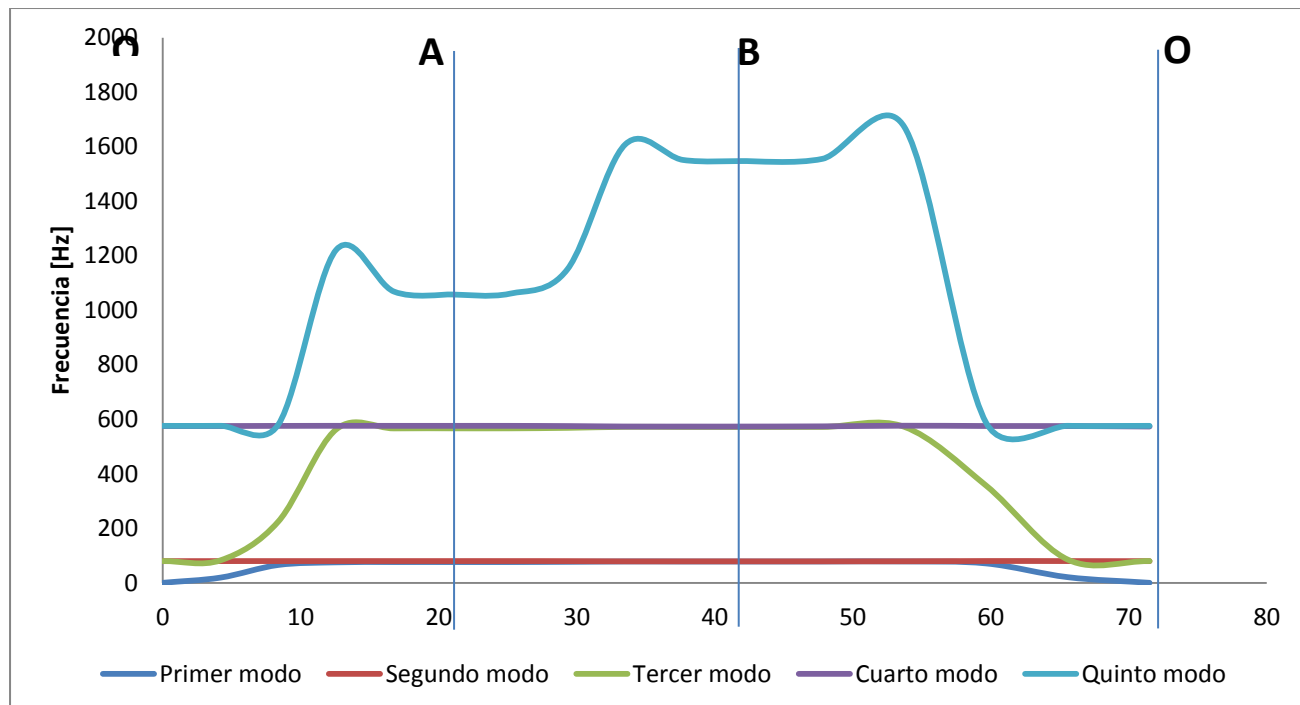
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	112.29	112.79	813.10	814.32
4.19	0.00	OA	22.63	112.61	115.34	813.21	814.38
8.38	0.00	OA	91.58	112.70	263.32	814.01	818.74
12.57	0.00	OA	106.05	112.80	792.80	814.35	1452.70
16.76	0.00	OA	107.57	112.77	799.82	814.28	1347.40
20.94	0.00	A	107.64	112.77	800.05	814.28	1333.30
20.94	4.19	AB	107.67	112.76	800.15	814.23	1336.30
20.94	8.38	AB	108.67	112.45	802.92	812.93	1441.50
20.94	12.57	AB	110.70	111.40	808.91	810.64	2111.30
20.94	16.76	AB	110.45	111.31	808.37	810.49	2048.90
20.94	20.94	B	110.43	111.31	808.33	810.48	2043.50
16.76	16.76	BO	110.46	111.32	808.40	810.51	2054.60
12.57	12.57	BO	110.73	111.72	808.85	811.51	2211.00
8.38	8.38	BO	100.32	113.06	411.64	814.99	823.13
4.19	4.19	BO	24.57	112.78	117.67	813.38	814.37
0.00	0.00	O	0.00	112.29	112.79	813.10	814.32



RESULTADOS CASO M	
Bandgap [Hz]	809.7 ± 0.78

RESULTADOS CASO N

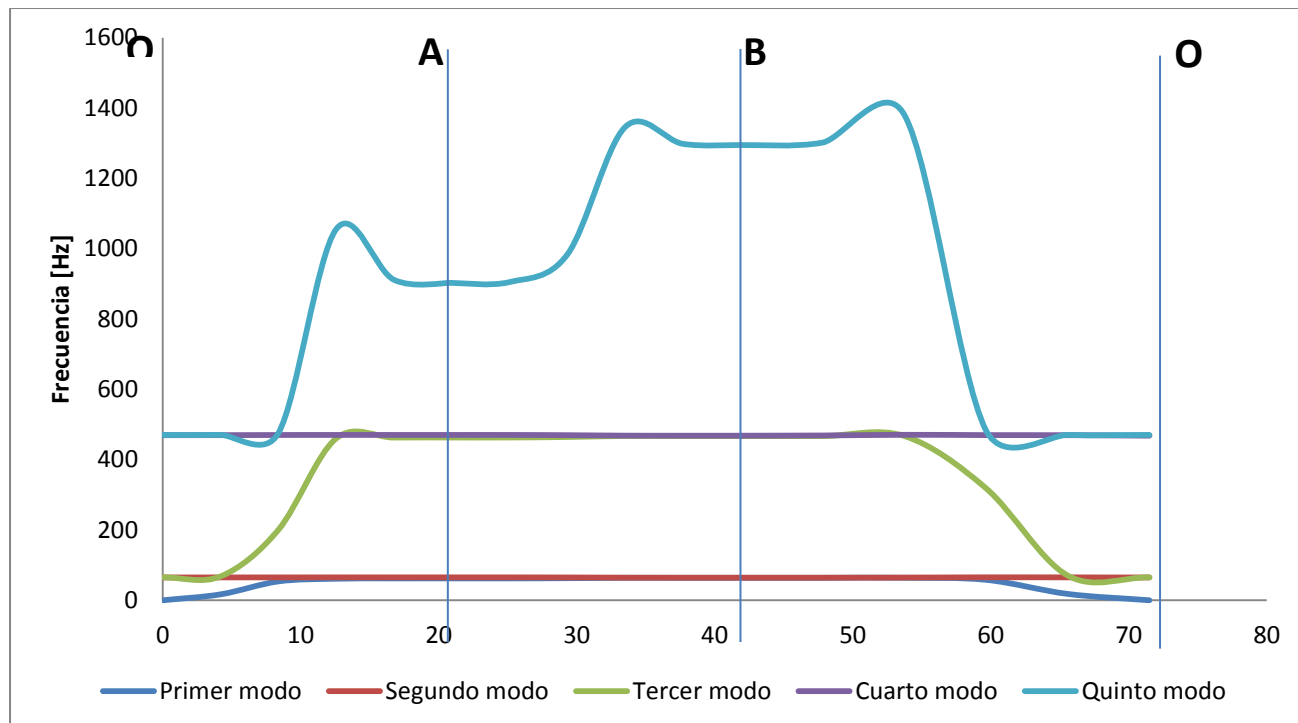
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	79.40	79.76	574.97	575.83
4.19	0.00	OA	19.11	79.64	82.52	575.07	575.89
8.38	0.00	OA	65.50	79.69	225.09	575.63	580.74
12.57	0.00	OA	75.00	79.76	562.92	575.85	1221.40
16.76	0.00	OA	76.07	79.74	566.44	575.80	1068.30
20.94	0.00	A	76.12	79.74	566.57	575.80	1057.70
20.94	4.19	AB	76.14	79.74	566.63	575.77	1060.40
20.94	8.38	AB	76.85	79.51	568.40	574.98	1150.00
20.94	12.57	AB	78.28	78.77	572.12	573.33	1608.10
20.94	16.76	AB	78.10	78.71	571.73	573.21	1551.20
20.94	20.94	B	78.09	78.71	571.71	573.20	1547.10
16.76	16.76	BO	78.11	78.71	571.75	573.22	1555.40
12.57	12.57	BO	78.30	79.00	572.13	573.92	1672.40
8.38	8.38	BO	71.13	79.95	356.72	576.30	587.43
4.19	4.19	BO	20.56	79.75	85.00	575.23	575.87
0.00	0.00	O	0.00	79.40	79.76	574.97	575.83



RESULTADOS CASO N	
Bandgap [Hz]	572.67 \pm 0.54

RESULTADOS CASO O

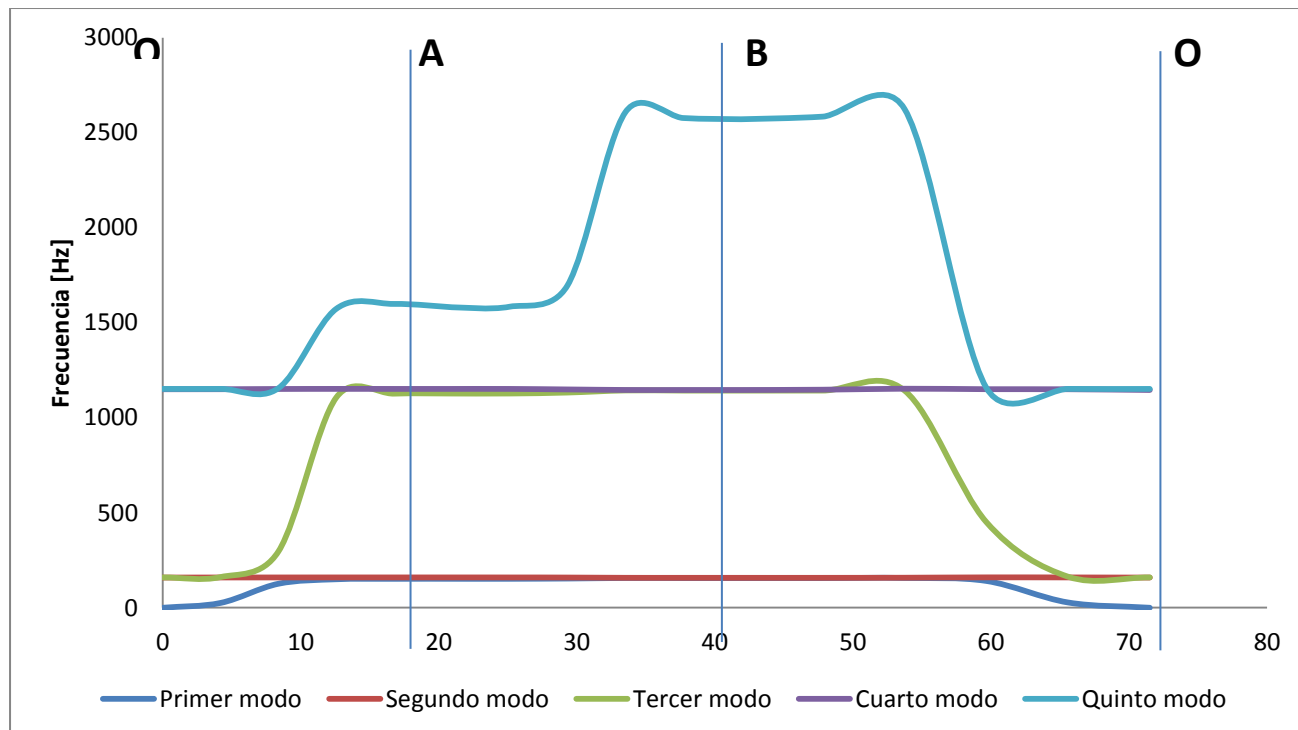
VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	64.83	65.12	469.46	470.17
4.19	0.00	OA	16.85	65.02	67.83	469.56	470.23
8.38	0.00	OA	53.68	65.07	200.33	470.01	475.13
12.57	0.00	OA	61.24	65.13	460.15	470.18	1055.10
16.76	0.00	OA	62.11	65.11	462.71	470.14	911.26
20.94	0.00	A	62.15	65.11	462.81	470.14	902.46
20.94	4.19	AB	62.17	65.10	462.86	470.12	904.84
20.94	8.38	AB	62.75	64.92	464.25	469.50	983.24
20.94	12.57	AB	63.91	64.32	467.17	468.15	1345.70
20.94	16.76	AB	63.77	64.27	466.85	468.05	1297.90
20.94	20.94	B	63.76	64.26	466.83	468.04	1294.50
16.76	16.76	BO	63.78	64.27	466.87	468.06	1301.40
12.57	12.57	BO	63.93	64.50	467.19	468.63	1380.90
8.38	8.38	BO	58.13	65.28	318.65	470.55	483.26
4.19	4.19	BO	18.03	65.12	70.26	469.71	470.20
0.00	0.00	O	0.00	64.83	65.12	469.46	470.17



RESULTADOS CASO O	
Bandgap [Hz]	467.62 ± 0.43

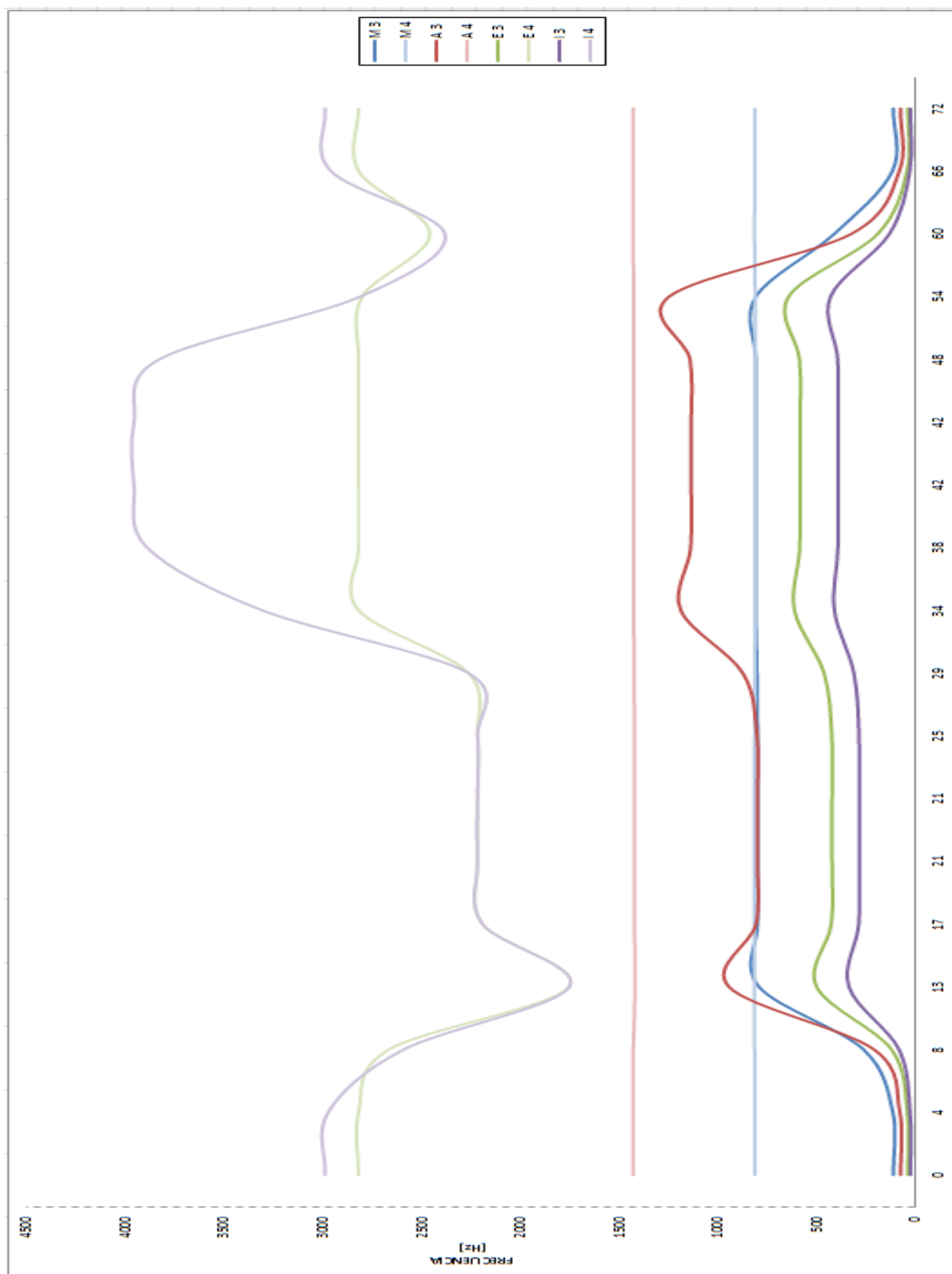
RESULTADOS CASO P

VECTOR DE ONDA		ZONA	FRECUENCIAS NATURALES [Hz]				
k_1	k_2		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.00	0.00	O	0.00	158.80	159.51	1149.80	1151.50
4.19	0.00	OA	25.31	159.24	161.55	1149.90	1151.60
8.38	0.00	OA	126.31	159.37	295.98	1151.10	1155.20
12.57	0.00	OA	149.92	159.52	1105.90	1151.60	1572.80
16.76	0.00	OA	152.11	159.48	1126.60	1151.50	1598.70
20.94	0.00	A	152.20	159.48	1127.10	1151.50	1581.10
20.94	4.19	AB	152.25	159.47	1127.30	1151.40	1584.10
20.94	8.38	AB	153.67	159.02	1132.30	1148.80	1696.30
20.94	12.57	AB	156.54	157.54	1143.40	1145.90	2607.00
20.94	16.76	AB	156.19	157.41	1142.60	1145.80	2577.00
20.94	20.94	B	156.17	157.41	1142.60	1145.80	2570.50
16.76	16.76	BO	156.21	157.42	1142.70	1145.80	2584.30
12.57	12.57	BO	156.59	158.00	1143.10	1147.30	2624.80
8.38	8.38	BO	141.03	159.89	451.16	1152.50	1157.90
4.19	4.19	BO	27.69	159.50	163.45	1150.10	1151.60
0.00	0.00	O	0.00	158.80	159.51	1149.80	1151.50



RESULTADOS CASO P	
Bandgap [Hz]	1144.6 \pm 1.2

CURVAS DE DISPERSIÓN EN FUNCIÓN DEL RADIO



CURVAS DE DISPERSIÓN EN FUNCIÓN DE LA DENSIDAD

